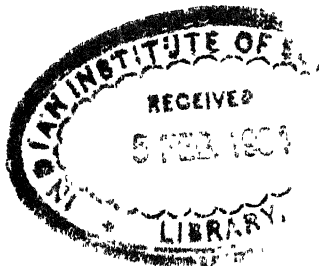


A. DUSCHEK — W. MAYER
LEHRBUCH DER
DIFFERENTIALGEOMETRIE

BAND II
RIEMANNSCHE GEOMETRIE

VON
WALTHER MAYER
PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT WIEN

MIT 7 FIGUREN IM TEXT



1930
LEIPZIG UND BERLIN.
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

Copyright 1930 by B. G. Teubner in Leipzig

Vorwort.

Dieses Lehrbuch umfaßt zwei Bände, von denen der erste die sogenannte elementare Differentialgeometrie behandelt, während der zweite den allgemeinen Riemannschen Räumen gewidmet ist. Die beiden Bände sind inhaltlich durchaus unabhängig voneinander, so daß insbesondere der zweite Band auch ohne Kenntnis des ersten lesbar ist. Es waren dadurch an vereinzelt Stellen Wiederholungen nicht zu vermeiden, doch haben wir stets getrachtet, dieselben durch Wahl verschiedener Gesichtspunkte nicht eintönig werden zu lassen. Der Anfänger allerdings, der von Differentialgeometrie noch nicht mehr kennt, als was in den Vorlesungen über Infinitesimalrechnung an geometrischen Anwendungen gebracht zu werden pflegt, wird gut daran tun, mit der Lektüre des zweiten Bandes nicht vor der des ersten zu beginnen.

Die Geometrie mehrdimensionaler Riemannscher Räume umfaßt die des dreidimensionalen euklidischen Raumes als Spezialfall. Trotzdem bedarf die getrennte Behandlung des letzteren im ersten Band wohl kaum einer näheren Begründung, die durch den Hinweis auf gewisse, teils überhaupt, teils nach dem gegenwärtigen Stand der Forschung nicht verallgemeinerungsfähige Probleme, durch den Hinweis auf den historischen Werdegang und schließlich durch Erwägungen didaktischer Natur leicht zu geben wäre. Dazu kommt noch die große Mannigfaltigkeit spezieller Fragestellungen, die gerade hier unser Interesse in besonderem Maße fesseln, weil sie den Anschauungsraum, das Nebeneinander unserer Sinneswelt widerspiegeln. So gut nun dieses Sonderinteresse zu verstehen ist und so wenig gegen dasselbe als mathematische Geschmacksrichtung prinzipiell gesagt werden kann, so sehr überspannt es seinen Anspruch in dem Augenblick, wo es diese Anschaulichkeit zum Wertmaßstab macht. In der Tat entziehen sich die mehrdimensionalen Räume so sehr jener Art von unmittelbarer Anschauung, wie sie etwa dem Techniker wertvoll ist, daß man sie „anfangs für Unsinn und später für Spielerei und unnützen Ballast“¹⁾ gehalten hat. Aber abgesehen von der erkenntnistheoretischen „Existenz“ und „Realität“ mehrdimensionaler Räume, die durch die Grundlagenforschung der letzten Jahrzehnte hinreichend geklärt erscheint, abgesehen auch von der Verwendung vier- und mehrdimensionaler Räume in

1) W. WIRTINGER, *Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung*, Hamburger Abhandlungen, Sonderschrift 3, 1926.

der modernen Physik, muß nicht dem, der die Mathematik um ihrer selbst willen liebt, also die mathematische Idee an die Spitze stellt, die Beschränkung einer allgemein durchführbaren Spekulation auf einen Sonderfall als willkürlich und unverständlich erscheinen?

Im übrigen strebt auch die mehrdimensionale Differentialgeometrie nach Anschaulichkeit, und zwar nach jener allgemeinen mathematischen Anschaulichkeit, die immer dann entsteht, wenn ein seinen Zwecken angepaßter Kalkül die mathematischen Gesetzmäßigkeiten darstellt und durchleuchtet. Man mag über Wert oder Unwert des Formalismus für Entstehung und Entwicklung mathematischer Ideen urteilen wie man will, eines scheint uns festzustehen: die mathematische Idee an sich ist einfach und durchsichtig; verwickelt und undurchsichtig sind oft nur die Wege, auf denen wir sie suchen. Ebenso einfach und durchsichtig aber wie die mathematische Idee selbst ist ihre endgültige Fassung durch einen adäquaten Kalkül, und deshalb ist die Ausbildung eines solchen ein sicheres Zeichen für die Reife einer mathematischen Theorie. Dabei darf aber — was leider heute vielfach der Fall ist — der Kalkül niemals Zweck, immer nur Werkzeug, Mittel zum Zweck sein! Nichts liegt uns ferner, als nach H. WEYL's treffender Kennzeichnung „den Orgien eines Zweck gewordenen Formalismus“ das Wort zu reden.

Der natürliche Kalkül der Differentialgeometrie ist die Tensorrechnung. Sie enthält die alte wohlvertraute Koordinatengeometrie, und die Einwände ihrer Kritiker richten sich implizit gegen diese mit, aber sie geht darüber hinaus. Dem geometrischen Charakter der zu leistenden Analyse angepaßt, erfüllt der Tensorkalkül die Formeln ihrer Herleitung und Darstellung nach auch dort noch mit geometrischem Inhalt, wo sich dieser der Fassung mit den Mitteln der Koordinatengeometrie entzieht.

Während sich die allgemeinen Riemannschen Räume ohne Tensorkalkül wohl überhaupt nicht fruchtbar behandeln lassen, wird er hier, von einem neueren englischen Buch abgesehen¹⁾, wohl zum erstenmal systematisch auch in der elementaren Flächentheorie verwendet. Die Vorteile liegen doch auf der Hand: Abkürzung aller Rechnungen, prägnante Formeln, deren geometrischer Inhalt, wie bereits erwähnt, ohne weiteres zu erkennen ist, die Möglichkeit, spezielle Parameter weitgehend vermeiden, gegebenenfalls aber doch einführen zu können usw. Im Zusammenhang damit erschien es geradezu selbstverständlich, auch die elementare Vektorrechnung einer Revision hinsichtlich ihrer formalen Seite zu unterziehen. Es ist in der Tat nicht einzu- sehen, warum die Methoden des allgemeinen Tensorkalküls nicht auch für den euklidischen Raum gut genug sein sollen — uns erscheinen sie besser als

1) J. E. CAMPBELL, *A course of differential geometry*, Oxford 1926.

die gebräuchliche, weder notwendige noch besonders leistungsfähige Symbolik.¹⁾

Wer eine Gefahr oder eine Schwäche darin zu erblicken glaubt, daß ein Formalismus, indem er das Denken oft erspart, des Denkens entwöhnen könnte, dem sei entgegengehalten, daß die Stärke eines wohldurchdachten Formalismus gerade darin liegt, daß er scharf und sicher die Stelle aufweist, wo die mathematische Idee einzusetzen hat.

Bei der Korrektur haben uns Frau JENNY LENSE und LISL DUSCHEK sowie die Herren G. BERGMANN, L. BIBBERBACH, D. BLANUŠA, N. HOFREITER, H. HORNICH, J. LENSE, W. REICH und H. SCHATZ in liebenswürdigster Weise unterstützt; ihnen allen, ganz besonders aber den Herren BIBBERBACH und LENSE für viele wertvolle kritische Bemerkungen und Anregungen, gebührt unser herzlichster Dank.

Wien, im Herbst 1929.

A. Duschek. W. Mayer.

Der vorliegende zweite Band ist aus Vorlesungen entstanden, die ich in den Jahren 1926 bis 1928 an der Wiener Universität gehalten habe. Ausschlaggebend für die Stoffwahl war neben meiner eigenen Arbeits- und Gedankenrichtung das Bestreben, ein lesbares Lehrbuch mittleren Umfangs zu schaffen. So mußte ich mir einerseits manche Beschränkung auferlegen, andererseits vieles aufnehmen, was Gemeingut aller den gleichen Gegenstand behandelnden Lehrbücher ist.²⁾ Es ist also mit Notwendigkeit zu erwarten, daß ein fachkundiger Leser manches Vorhandene als minder wesentlich und vieles Nichtvorhandene für wichtiger halten wird. Ausdrücklich erwähnen will ich nur noch, daß mir die in einem Buch über Riemannsche Geometrie gebotene Unterdrückung der ideenreichen und weite Perspektiven eröffnenden Ansätze von WEYL und WIRTINGER besonders schwer gefallen ist. Soviel über das Fehlende; für das Vorhandene verweise ich auf das Inhaltsverzeichnis.

1) Man vergleiche auch eine demnächst in den Jahresberichten der D. M. V. erscheinende Note *Über symbolfreie Vektorrechnung* von A. DUSCHEK.

2) Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien genannt:

D. J. STRUIK, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung*, Berlin 1922.

J. A. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*. Berlin 1924.

T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. Rom 1925. Deutsche Ausgabe von A. DUSCHEK u. d. T. *Der absolute Differentialkalkül und seine Anwendungen in Geometrie und Physik*. Berlin 1928.

L. P. EISENHART, *Riemannian geometry*. New York 1926.

E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Paris 1928.

Eine Reihe von Arbeiten, die ich gemeinsam mit meinen Freunden I. BLUMENFELD und C. BURSTIN verfaßt habe¹⁾, fanden in diesem Band Verwendung. Aber auch sonst wird der Fachmann in Resultaten und Methoden Neues und manches Alte in neuer Behandlung finden. Ich unterlasse eine ängstliche Aufzählung im einzelnen — bei dem Umfang der Literatur und der wechselseitigen Verflechtung der Ideen eine ebenso mißliche wie letzten Endes unwesentliche Bemühung.

W. Mayer.

1) BLUMENFELD-MAYER, *Über die Existenz Ebenster in Riemannschen Räumen*. Monatshefte für Mathematik und Physik, XXII.

BURSTIN-MAYER, *Das Formenproblem der l -dimensionalen Hyperflächen in n -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*. Ebenda, XXXIV.

MAYER, *Über das vollständige Formensystem der F_1 im R_n* . Ebenda, XXXV.

BURSTIN, *Beiträge zur n -dimensionalen Differentialgeometrie*. Ebenda, XXXVI. — Diese Note beschäftigt sich unter anderem ebenfalls mit den F_1 des R_n ; diese Untersuchungen wurden dann in einer im gleichen Band erschienenen Arbeit von G. BERGMANN, *Über eine mit den Hypertorsen verwandte Flächenklasse*, weitergeführt.

Inhaltsverzeichnis.

§	I. Tensoralgebra.	Seite
1.	Der n dimensionale Punktraum der Tensorrechnung. Koordinatentransformation	1
2.	Skalare Größen und kontravariante Vektoren	4
3.	Kovariante Vektoren	8
4.	Adjungierte n -Beine	11
5.	Tensoren	12
6.	Die Vektorräume eines Punktes P	16
7.	Die Pluckerschen Koordinaten eines Vektorraumes	20
8.	Bemerkungen und Beispiele zur Tensoralgebra	22
II. Tensoranalysis.		
1.	Die tensorielle Ableitung	29
2.	Der Riccikalcul	31
III. Der n dimensionale Riemannsche Raum R_n .		
1.	Einführung	36
2.	Das Messen	39
3.	Das Messen (Fortsetzung)	47
4.	Die l dimensionalen Mannigfaltigkeiten des R_n	50
IV. Formeln von Frenet. Der euklidische Raum.		
1.	Kurven im Riemannschen R_n	59
2.	Der euklidische R_n . Rechtwinklige kartesische Koordinaten	64
3.	Kurven im euklidischen R_n	72
V. Variationsrechnung.		
1.	Der n dimensionale Punktraum der Variationsrechnung	79
2.	Der Eulersche Vektor	84
3.	Bemerkungen über den Eulerschen Vektor	87
4.	Die Normalform des Systems der Eulerschen Differentialgleichungen	90
5.	Die Normalkoordinaten mit einem Zentrum P_0	93
6.	Charakterisierung der Normalkoordinaten durch die Vektorfunktion $F(x, \lambda)$	98
7.	Die Weierstraßsche δ -Funktion	101
8.	Allgemeine Herleitung der δ -Funktion	104
9.	Zwei Folgerungen	107
10.	Skizzierung des zweidimensionalen Variationsproblems	108
11.	Anwendung auf den Riemannschen R_n	115
VI. Der Riemannsche R_n , Fortsetzung.		
1.	Die Parallelverschiebung von Levi-Civita	118
2.	Eine Reihenentwicklung für die Parallelverschiebung. Der Krümmungstensor	123
3.	Geodätische Mannigfaltigkeiten und geodätische Koordinaten	132
4.	Ebenen im R_n . Räume konstanter Krümmung	140
5.	Eindeutig parallelverschobene Vektorräume im Riemannschen R_n	147

VII. Die l dimensionalen Hyperflächen im Riemannschen R_n	
§	und die Erweiterung des absoluten Differentialkalküls. Seite
1.	Flächen- und Raumtensoren. Das verallgemeinerte Ricci-differential. 154
2.	Geodätische F_l und Ebenen E_l 158
3.	Die Relativkrümmungen einer F_l im R_n 162
VIII. Spezielle Riemannsche Räume, insbesondere die Räume konstanter Krümmung.	
1.	Der Schursche Raum 167
2.	Kongruenz eines Riemannschen R_n um einen Punkt P_0 173
3.	Fortsetzung 177
4.	Der R_n konstanter Krümmung 181
5.	Die projektiven Koordinaten im R_n konstanter Krümmung. Die Bewegungsgruppen 188
6.	Die Klein-Cayleysche projektive Darstellung der Räume konstanter negativer Krümmung. 195
7.	Konforme Abbildung der Räume konstanter Krümmung auf den euklidischen R_n 199
IX. Die l dimensionalen Hyperflächen des n dimensionalen Raumes konstanter Krümmung. Das Formenproblem.	
1.	Die invarianten J_k -Räume der F_l 201
2.	Ein normiertes, die J_k -Räume aufspannendes Bein und die adjungierten Formen der F_l 203
3.	Die Ableitungsgleichungen. 207
4.	Berechnung der $(\alpha\beta)C_p$ 209
5.	Das Formenproblem 215
6.	Die Formenquadrate 219
7.	Die Einbettungszahl einer F_l 222
8.	Über die Krümmungstensoren der F_l 223
9.	Kurven auf der F_l 224
10.	Das Formensystem der F_l im n dimensionalen Raum R_n der konstanten Krümmung ϱ 226
Anhang.	
I.	Die Erweiterung des Satzes von Meusnier für die F_l des euklidischen R_n 233
II.	Der Gaußsche Integralsatz im Riemannschen R_n 237
III.	Der Tensoralkül in der klassischen Mechanik 240
Register 244

Zur Beachtung!

Die Formelverweise sind folgendermaßen zu verstehen (als Beispiel):

(III, 3, 15) heißt Formel (15) in Abschnitt III, § 3.

(3, 15) heißt Formel (15) in § 3 desselben Abschnittes, in dem der Verweis steht.

(15) heißt wie gewöhnlich (15) desselben Paragraphen, in dem der Verweis steht.

I. Tensoralgebra.

§ I. Der n dimensionale Punktraum der Tensorrechnung. Koordinatentransformation.

Unter einem n dimensionalen Punktraum R_n verstehen wir eine Mannigfaltigkeit von ∞^n Elementen, die wir *Punkte* nennen. Das Symbol ∞^n soll dabei besagen, daß jeder Punkt P des R_n durch die Angabe von n (reellen) Zahlen

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_n,$$

den *Koordinaten* des Punktes, in ein-eindeutiger Weise bestimmt ist, oder genauer, daß jedem Punkt P des R_n ein Zahlen- n -tupel eines bestimmten Bereiches¹⁾ zugeordnet ist und umgekehrt.

Bei nicht rein differentialgeometrischen Fragen, d. h. bei Fragen der Geometrie im großen, ist es nicht immer möglich, den betrachteten Raum durch ein einziges Parametersystem zu beschreiben; man denkt sich in solchen Fällen den Raum in endlich viele Teile so zerlegbar, daß jedes Teilgebiet ein-eindeutig durch Parameter beschrieben werden kann.²⁾

Wir werden es im folgenden immer mit Funktionen $\Phi(P)$ der Punkte P des R_n zu tun haben, d. h. mit Vorschriften, die jedem Punkt P einen Zahlwert zuordnen.

Aus der Gesamtheit der Koordinatensysteme wählen wir ein bestimmtes, z. B. (1) aus, in bezug auf welches wir die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der betrachteten Funktionen beurteilen. Wir bezeichnen mit m eine feste, mit ρ eine beliebige positive ganze Zahl, für die $0 < \rho \leq m$ ist. Eine Funktion $\Phi(P)$ heiße nun ρ fach stetig differenzierbar, wenn sie in dem ausgewählten Koordinatensystem (1) im üblichen Sinn, d. h. als Funktion der Koordinaten angesehen, ρ fach stetig differenzierbar ist.

Wir nennen dann weiter jedes Koordinatensystem ein m -System, in dem die eben definierte Gesamtheit der ρ fach stetig differenzierbaren Funktionen

1) In der Menge aller Zahlen- n -tupel (1) — wir nennen diese Menge kurz den n dimensionalen Zahlraum — sei dieser Bereich (das „Bild“ des Punktraumes R_n) eine n dimensionale topologische Kugel, d. h. ein umkehrbar eindeutiges und stetiges Bild der Menge aller Zahlen- n -tupel, für die $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2$ ist.

2) Man vergleiche den Integralsatz von GAUSS-BONNET im ersten Band, VI, § 5.

mit der Gesamtheit der Funktionen zusammenfällt, die im betrachteten System im üblichen Sinne ρ fach stetig differenzierbar sind.

Ein m -System hat also die zwei charakteristischen Eigenschaften:

a) Die Punkte des R_n sind ein-eindeutig den Zahlen- n -tupeln (1) des Systems zugeordnet.

b) Ist $\rho \leq m$, so haben ρ fach stetig differenzierbare Funktionen der Punkte des R_n und nur solche, als Funktionen der Koordinaten angesehen, stetige Ableitungen bis zur ρ ten Ordnung einschließlich.

Das oben ausgewählte System (1) ist in trivaler Weise ein m -System, aber nicht das einzige. Denn sei

$$(2) \quad \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$$

ein zweites m -System, so hat die nach a) ein-eindeutige Zuordnung der Punkte des R_n zu den Zahlen- n -tupeln (1) und (2) eine ein-eindeutige Zuordnung dieser n -Tupel untereinander zur Folge, was wir

$$(3) \quad \bar{x}_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$$

$$(4) \quad x_i = \psi_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

schreiben.¹⁾ Dabei sind die φ_i und ψ_i eindeutige Funktionen ihrer Argumente. Nun hat jede der Koordinaten \bar{x}_i im System (2) alle Ableitungen

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{x}_k} = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} = 0, \quad \dots,$$

wo $\delta_{ik} = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem $i = k$ oder $i \neq k$ ist, und somit sind die \bar{x}_i nach b) m fach stetig differenzierbare Funktionen der Punkte des R_n und haben daher auch (wieder nach b)) als Funktionen der x_i stetige Ableitungen bis einschließlich m ter Ordnung. Es sind also die Funktionen $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ in (3) und ebenso die Funktionen $\psi_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ in (4) genau m mal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente.

Damit ist aber der Nachweis für die Existenz unendlich vieler m -Systeme erbracht: Zufolge (3) und (4) ist jede ρ fach stetig differenzierbare ($\rho \leq m$) Funktion $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ auch als Funktion der \bar{x}_i genau ρ mal stetig differenzierbar und umgekehrt.

Zwischen je zwei m -Systemen (1) und (2) bestehen somit die $2n$ Transformationsgleichungen (3) und (4), in denen die auftretenden Funktionen m mal stetig differenzierbar sind, und umgekehrt führt eine derartige Koordinatentransformation ein m -System wieder in ein m -System über.

1) Wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, repräsentieren alle Indizes (lateinische und griechische) die Zahlen $1, 2, \dots, n$. Über doppelt vorkommende Indizes ist stets zu summieren. Vgl. für $n = 3$ und $n = 2$ die Festsetzungen im ersten Band I, § 1 und III, § 1. (3) und (4) schreiben wir auch $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n)$ bzw. $x_i = x_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.

Aus (3) und (4) folgen die Identitäten

$$(5) \quad x_i = \varphi_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \quad \text{und} \quad \bar{x}_i = \varphi_i(\psi_1, \dots, \psi_n).$$

Da $m \geq 1$ vorausgesetzt ist, sind die φ_i und ψ_i mindestens einmal stetig differenzierbar. Die erste der Identitäten (5) gibt demnach

$$(6) \quad \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} \cdot \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_k} = \delta_{i,k}$$

oder für die Funktionaldeterminanten

$$(7) \quad \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} \cdot \frac{\partial(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = 1.$$

Jede der beiden in (7) auftretenden Funktionaldeterminanten ist als ganze rationale Funktion stetiger Funktionen selbst stetig, und da ihr Produkt 1 ist, kann in keinem Punkte P des R_n eine der beiden Determinanten verschwinden, da die andere sonst in P unendlich groß werden müßte, also nicht stetig wäre. Somit ist in jedem Punkt des R_n

$$(8) \quad \frac{\partial(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

Existiert zur Koordinatentransformation (3), für die (8) gilt, auch die inverse Transformation (4), so sind die $\psi_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ebenso oft stetig differenzierbar (z. B. m mal) wie die $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$. Jede m fach stetig differenzierbare Transformation (3), für die (8) gilt und (4) existiert, führt daher ein m -System wieder in ein m -System über und die Gesamtheit aller derartigen Transformationen führt von einem m -System zu jedem anderen.

Wir wollen in der Folge m -Systeme *zulässige* Koordinatensysteme oder Bezugssysteme, auch kurz Systeme nennen. Dabei bedeutet m eine je nach dem zu behandelnden Problem fest gewählte positive ganze Zahl.

Eine Aussage über Funktionen der Punkte des R_n heißt *sinnvoll*, wenn sie in gleicher Weise für alle zulässigen Koordinatensysteme gilt.

In verschiedenen Gebieten der Mathematik und der mathematischen Physik hat man es öfters nur mit Teilen der Gesamtheit aller zulässigen Koordinatensysteme zu tun. Die klassische Mechanik betrachtet z. B. solche Systeme, die durch Transformationen der besonderen Gestalt

$$(9) \quad \begin{aligned} \bar{x}_i &= \varphi_i(x_1, \dots, x_n, t) \\ \bar{t} &= t \end{aligned}$$

bzw. bei der Untersuchung starrer Körper durch Transformationen

$$(10) \quad \begin{aligned} \bar{x}_i &= a_{ik}(t) x_k + b_i(t) \\ \bar{t} &= t \end{aligned}$$

ineinander übergeführt werden können. Dabei bilden die $a_{ik}(t)$ eine orthogonale Matrix (vgl. für $n=3$, I, § 1 des ersten Bandes).

Die Transformationen (8) bilden ebenso wie die speziellen (9) und (10) in ihrer Gesamtheit eine *Transformationsgruppe*. (Vgl. I, § 2 des ersten Bandes.)

§ 2. Skalare Größen und kontravariante Vektoren.

Ist in einem Punkte P des R_n eine geometrische oder physikalische Größe Φ , z. B. die Temperatur oder ein Potential, durch *einen* Zahlwert gegeben, so heißt sie eine *skalare Größe*, ein *Skalar* oder eine *Invariante*.

Derartige Größen sind völlig unabhängig von jedem Koordinatensystem definiert, müssen aber natürlich für unsere Zwecke auch durch Koordinaten beschrieben werden. Nun ist der Punkt P , in dem der Skalar Φ gegeben ist, in jedem zulässigen Koordinatensystem durch seine Koordinaten x_i festgelegt, daher der Skalar Φ in P durch die $n+1$ Größen

$$(1) \quad x_i, \Phi,$$

die sich beim Übergang vom Koordinatensystem (1, 1) zum Koordinatensystem (1, 2) nach dem Gesetz

$$(2) \quad \bar{\Phi} = \Phi, \quad \bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n)$$

transformieren. Ist $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ in einem Gebiet des R_n definiert, so nennen wir Φ eine skalare Raumfunktion oder bloß Raumfunktion. Dann hat nach § 1 die Aussage, eine solche Funktion sei k fach ($k \leq m$) stetig differenzierbar den Sinn, daß $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ in einem m -System stetige Differentialquotienten bis einschließlich zur k ten Ordnung besitzt.

Neben den Skalaren sind in der Geometrie und Physik noch Größen anderer Art („extensive Größen“ im Sinne GRASSMANN'S) von Bedeutung.

Sei z. B. in einem beliebigen zulässigen Koordinatensystem die Bahnkurve

$$(3) \quad x_i = x_i(t)$$

eines Massenpunktes gegeben, bezogen auf die Zeit als Parameter. Wir wollen dabei die x_i als stetig differenzierbare Funktionen von t ansehen, was dann nach § 1 für jedes zulässige Koordinatensystem gilt. In der Kinematik betrachtet man bekanntlich in jedem Punkt t^1 mit den Koordinaten (3) den *Geschwindigkeitsvektor*, dessen Komponenten in unserem Systeme die n Werte

$$(4) \quad \lambda^i = \frac{dx_i}{dt}$$

1) D. i. der dem Wert t des Parameters entsprechende Punkt der Bahnkurve mit den Koordinaten $x_i(t)$.

haben. Die $2n$ Größen

$$(5) \quad x_1, \dots, x_n; \quad \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$$

heißen *Bestimmungsstücke* des Vektors; sie bestehen aus den Koordinaten x_i des *Definitionspunktes* x_i und den *Komponenten* $\frac{dx_i}{dt}$. Wir stellen uns die Frage, wie sie sich beim Übergang zu einem anderen Koordinatensystem \bar{x}_i transformieren. Aus $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n)$ folgt, daß

$$(6) \quad \bar{x}_i(t) = \bar{x}_i[x_1(t), \dots, x_n(t)]$$

die Bahnkurve unseres Massenpunktes im System \bar{x}_i ist. Für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors gibt dann (6) die Transformation

$$(7) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor im Bahnpunkte t , dessen Bestimmungsstücke die $2n$ Größen (5) sind, transformiert sich also beim Übergang zu einem anderen Koordinatensystem \bar{x}_i nach

$$(8) \quad \bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n), \quad \frac{d\bar{x}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}.$$

Wir nennen allgemein n in einem Punkte $P(x_1, \dots, x_n)$ gegebene Größen λ^i , insgesamt also die $2n$ Größen

$$(9) \quad x_1, \dots, x_n; \quad \lambda^1, \dots, \lambda^n$$

einen *kontravarianten Vektor*, wenn sich diese $2n$ Bestimmungsstücke beim Übergang zum Koordinatensystem $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ nach dem Gesetz

$$(10) \quad \bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n), \quad \bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \lambda^k$$

transformieren. In jedem Koordinatensystem hat also der kontravariante Vektor (9) genau $2n$ Bestimmungsstücke, nämlich seine Komponenten $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ und die Koordinaten x_1, \dots, x_n des Definitionspunktes.¹⁾ Ein kontravarianter Vektor, z. B. (9), ist durch seine $2n$ Bestimmungsstücke in einem zulässigen Bezugssystem völlig bestimmt, da ja dann in jedem Bezugssystem nach (10) diese $2n$ Bestimmungsstücke berechenbar sind. Wir wissen aber noch nicht, ob diese Definition des kontravarianten Vektors widerspruchlos ist. Für den Übergang von unserem Ausgangssystem x_i zu den \bar{x}_i gelten ja die einen kontravarianten Vektor definierenden Transformationsgleichungen (10).

1) Die Indizes, die die Komponenten des kontravarianten Vektors numerieren, setzen wir in der üblichen Weise rechts oben an; λ^i ist also die i te Komponente des Vektors (9).

Gelten aber entsprechende Gleichungen auch für zwei beliebige zulässige Systeme \bar{x}_i und $\bar{\bar{x}}_i$? Es muß dann

$$(11) \quad \bar{x}_i = \bar{\bar{x}}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \quad \bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{\bar{x}}_i}{\partial \bar{x}_k} \bar{\lambda}^k$$

richtig sein, wo $\bar{\bar{x}}_1, \dots, \bar{\bar{x}}_n; \bar{\lambda}^1, \dots, \bar{\lambda}^n$ die $2n$ Bestimmungsstücke des Vektors (9) im System $\bar{\bar{x}}_i$ sind. Vom Ausgangssystem x_i zum System $\bar{\bar{x}}_i$ führt die zusammengesetzte Transformation

$$(12) \quad \bar{\bar{x}}_i = \bar{\bar{x}}_i[\bar{x}_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \bar{x}_n(x_1, \dots, x_n)].$$

Die $2n$ Bestimmungsstücke $\bar{\bar{x}}_i, \bar{\lambda}^i$ genügen demnach den Relationen

$$(13) \quad \bar{\bar{x}}_i = \bar{\bar{x}}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \quad \bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{\bar{x}}_i}{\partial x_l} \lambda^l = \frac{\partial \bar{\bar{x}}_i}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_l} \lambda^l;$$

die letzteren sind wegen

$$(14) \quad \bar{\lambda}^k = \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_l} \lambda^l$$

mit den Relationen (11) identisch. Somit ist die Definition des kontravarianten Vektors widerspruchlos.¹⁾

In den obigen Überlegungen ist der Gruppennachweis für die Transformationen (10) des kontravarianten Vektors enthalten.

Da ein kontravarianter Vektor durch $2n$ Bestimmungsstücke festgelegt ist, bildet die Gesamtheit aller kontravarianten Vektoren einen $2n$ dimensionalen Raum, den wir den *kontravarianten Vektorraum* nennen. Die Gesamtheit aller kontravarianten Vektoren mit festem Anfangspunkt $P(x_1, \dots, x_n)$ heißt der *n dimensionale (kontravariante) Vektorraum im Punkt P* .²⁾

Wir führen nun einige Sätze an, die direkte Folgerungen aus den Transformationsgleichungen (10) des kontravarianten Vektors sind.

A. Sind in einem Bezugssystem die Komponenten λ^i eines kontravarianten Vektors x_i, λ^i alle Null, so gilt dies auch für jedes andere Bezugssystem.

1) Die gemeinte Widerspruchslosigkeit bezieht sich auf die Möglichkeit, einen kontravarianten Vektor durch Angabe seiner Bestimmungsstücke x_i, λ^i in einem ausgewählten Bezugssystem zu definieren, wobei die λ^i keiner Einschränkung unterliegen. In der Definition des kontravarianten Vektors selbst kann kein Widerspruch enthalten sein, wie aus der Existenz des Geschwindigkeitsvektors (5) hervorgeht. Es ist aber nicht gezeigt worden, daß ein Geschwindigkeitsvektor willkürliche Komponenten haben kann.

2) Dagegen ist die Gesamtheit aller Vektoren mit beliebigem Anfangspunkt P , aber festen Komponenten λ^i , nach den Transformationsgesetzen an ein bestimmtes Koordinatensystem (oder zumindest an einen Teil aller zulässigen Koordinatensysteme) gebunden und somit kein sinnvoller geometrischer Begriff. Beschränkt man sich jedoch auf lineare Transformationen der Punktkoordinaten, d. h. treibt man *affine Geometrie* (vgl. I, § 2 des ersten Bandes), so gehen feste λ^i in feste $\bar{\lambda}^i$ über; der Begriff des Vektors mit festen Komponenten, aber beliebigem Anfangspunkt ist ein sinnvoller Begriff der affinen Geometrie.

Diese Tatsache berechtigt uns, vom „*kontravarianten Nullvektor*“ eines Punktes P zu sprechen.

B. Ist x_i, λ^i ein kontravarianter Vektor, so ist auch $x_i, \varrho \lambda^i$, d. h.

$$x_1, \dots, x_n; \varrho \lambda^1, \dots, \varrho \lambda^n$$

ein kontravarianter Vektor, wenn ϱ ein Skalar, d. h. eine gegenüber unseren Raumtransformationen invariante Größe ist. Dieser Satz läßt sich auch folgendermaßen formulieren: *Man darf einen kontravarianten Vektor mit einem Skalar multiplizieren.*

C. Sind x_i, λ^i und x_i, μ^i zwei Vektoren des kontravarianten Vektorraumes im Punkt x_i , so ist auch $x_i, \lambda^i + \mu^i$, d. h. $x_1, \dots, x_n; \lambda^1 + \mu^1, \dots, \lambda^n + \mu^n$ ein kontravarianter Vektor in x_i . Man darf demnach kontravariante Vektoren mit demselben Definitionspunkt addieren.

Aus A, B und C folgt: Sind in einem Punkte x_i die Vektoren

$$x_i, \lambda^i; x_i, \mu^i; \dots; x_i, \sigma^i$$

gegeben und gilt in einem zulässigen Koordinatensystem

$$A \lambda^i + B \mu^i + \dots + F \sigma^i = 0$$

wo A, \dots, F Skalare sind, so gilt diese Beziehung in jedem zulässigen Koordinatensystem.

Somit ist die folgende Definition sinnvoll: *Wir nennen m kontravariante Vektoren¹⁾*

$$x_1, \dots, x_n; {}_{(\alpha)}\lambda^1, \dots, {}_{(\alpha)}\lambda^n \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

des Vektorraumes in $P(x_1, \dots, x_n)$ linear abhängig (oder bloß abhängig), wenn eine Relation

$$(15) \quad {}_{(\alpha)}A {}_{(\alpha)}\lambda^i = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

besteht, in der nicht alle Skalare ${}_{(\alpha)}A$ gleich Null sind. Besteht dagegen eine solche Relation nicht, so heißen die m Vektoren linear unabhängig.

Es gilt dann: *Im kontravarianten Vektorraum eines Punktes x_i gibt es genau n unabhängige kontravariante Vektoren, während $n + 1$ solche stets abhängig sind.*

Da die Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Vektoren mit gleichem Definitionspunkt nicht an ein bestimmtes Koordinatensystem gebunden ist, so können wir uns auf irgendein zulässiges Koordinatensystem beschränken. Wir wählen n^2 Größen ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ ($\alpha, i = 1, \dots, n$) so, daß die Determinante

1) Die Indizes α , die vor dem die geometrische Größe (hier Vektor) bezeichnenden Buchstaben stehen, bedeuten bloße Numerationen, so z. B. bedeutet ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ die i te Komponente des α ten der Vektoren ${}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i, \dots, {}_{(m)}\lambda^i$. Auch die α unterliegen der Summationsvorschrift doppelt vorkommender Indizes.

$$(16) \quad D({}_{(\alpha)}\lambda^i) = \begin{vmatrix} (1)\lambda^1 & (1)\lambda^2 & \dots & (1)\lambda^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n)\lambda^1 & (n)\lambda^2 & \dots & (n)\lambda^n \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Dann sind die im Punkte x_i definierten n kontravarianten Vektoren

$$(17) \quad x_1, \dots, x_n; \quad {}_{(\alpha)}\lambda^1, \dots, {}_{(\alpha)}\lambda^n$$

in der Tat linear unabhängig (die Gleichungen (15) mit den Unbekannten ${}_{(\alpha)}A$ haben dann nur die Nullösung), und zwar ist (16) notwendig und hinreichend dafür.

Ist nun x_i, μ^i ein weiterer Vektor des Punktes x_i , so ist wegen (16) das System linearer Gleichungen

$$(18) \quad \mu^i = {}_{(\alpha)}\mu \, {}_{(\alpha)}\lambda^i$$

nach den ${}_{(\alpha)}\mu$ eindeutig auflösbar, d. h. μ^i ist linear darstellbar durch die Vektoren (17).¹⁾

Durch eine Transformation

$$(19) \quad {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i = {}_{(\alpha\beta)}B \, {}_{(\beta)}\lambda^i \quad (\alpha, \beta, i = 1, \dots, n)$$

mit nicht verschwindender Determinante

$$(20) \quad |{}_{(\alpha\beta)}B| \neq 0$$

geht ein System unabhängiger Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ in ein zweites derartiges ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i$ über und umgekehrt.

Aus den Transformationsgleichungen (10) des kontravarianten Vektors folgt, daß die Eigenschaft seiner Komponenten, ρ fach stetig differenzierbar zu sein, sinnvoll, d. h. vom m -Bezugssystem unabhängig ist, sobald $\rho \leq m - 1$ ist.

§3. Kovariante Vektoren.

Sei wieder ein R_n auf ein zulässiges Koordinatensystem bezogen und in ihm ein Kraftfeld durch ein Potential Φ gegeben. In jedem Koordinatensystem ist dann Φ eine Funktion der Koordinaten, die durch $\Phi = f(x_1, \dots, x_n)$ im System x_i und durch $\Phi = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ im System $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ gegeben sei. Im Punkte $P(x_1, \dots, x_n)$ [bzw. $P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$] ist dann die Kraft durch ihre n Komponenten

$$\lambda_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

wenn das System x_i , bzw. durch

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_i}$$

1) Die in (18) auftretenden Koeffizienten ${}_{(\alpha)}\mu$ sind Skalare. Aus $\mu^i - {}_{(\alpha)}\mu \, {}_{(\alpha)}\lambda^i = 0$ folgt die lineare Abhängigkeit der $n + 1$ Vektoren.

gegeben, wenn das System \bar{x}_i zugrunde gelegt ist. Nun folgt aus $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} \quad \text{oder} \quad \lambda_i = \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} \bar{\lambda}_k.$$

Die $2n$ Bestimmungsstücke $x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des Kraftvektors transformieren sich somit nach dem Gesetz

$$(1) \quad \bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n), \quad \lambda_i = \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} \bar{\lambda}_k.$$

Allgemein nennen wir n in einem Punkte $P(x_1, \dots, x_n)$ gegebene Größen λ_i , also im ganzen $2n$ Größen

$$(2) \quad x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

einen *kovarianten Vektor*, wenn sich diese $2n$ Bestimmungsstücke beim Übergang vom Koordinatensystem x_i zum Koordinatensystem \bar{x}_i nach dem Gesetz (1) transformieren; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heißen wieder *Komponenten* des kovarianten Vektors (2) mit dem *Definitionspunkt* x_i .

Die Indizes, die die Komponenten des kovarianten Vektors numerieren, sind in üblicher Weise *rechts unten* gesetzt.¹⁾

Man kann die Komponenten des kovarianten Vektors statt durch die Transformationsgleichungen (1), die wie die des kontravarianten Vektors eine Gruppe bilden, als *das Koeffizientensystem einer im Punkte x_i gegebenen, gegenüber Koordinatentransformationen invarianten Linearform (der Komponenten) eines willkürlichen kontravarianten Vektors x_i, ϱ^i definieren*. Ist

$$(3) \quad \lambda_i \varrho^i = \lambda_1 \varrho^1 + \dots + \lambda_n \varrho^n$$

diese Linearform im Systeme x_i und

$$(4) \quad \bar{\lambda}_i \bar{\varrho}^i$$

dieselbe Linearform im Systeme \bar{x}_i , so folgt aus unserer Festsetzung

$$\lambda_i \varrho^i = \bar{\lambda}_i \bar{\varrho}^i = \bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \varrho^k$$

oder

$$(5) \quad \left(\lambda_k - \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \bar{\lambda}_i \right) \varrho^k = 0,$$

was wegen der Willkür des Vektors ϱ^k

$$(6) \quad \lambda_k = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \bar{\lambda}_i$$

gibt.

Daraus folgt die wichtige Tatsache, daß das „*innere Produkt*“ eines in einem Punkte x_i definierten kontravarianten Vektors x_i, λ^i und eines im selben Punkt definierten kovarianten Vektors x_i, μ_i , also die in den Komponenten eines jeden der beiden Vektoren lineare Form $\mu_i \lambda^i$ eine *Invariante (Skalar)* ist.

1) Die Koordinaten x_i sind natürlich kein kovarianter Vektor.

Sind

$$(7) \quad x_i, {}_{(\alpha)}\lambda^i$$

n unabhängige kontravariante Vektoren des Punktes x_i und x_i, μ_i ein kovarianter Vektor im selben Punkt, so sind

$$(8) \quad {}_{(\alpha)}I = {}_{(\alpha)}\lambda^i \mu_i$$

n Invarianten, aus denen wegen $|{}_{(\alpha)}\lambda^i| \neq 0$ die n Komponenten μ_i als Funktionen der ${}_{(\alpha)}I$ und der ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ eindeutig berechenbar sind.

Dadurch erledigt sich der im vorhergehenden Paragraphen für den kontravarianten Vektor geführte Nachweis der Widerspruchslosigkeit der Definition des kovarianten Vektors, der natürlich auch hier ganz analog gegeben werden könnte. [Vgl. die Fußnote 1) S. 6.] In der Tat können wir aus den Größen ${}_{(\alpha)}I$ und ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ in jedem zulässigen Koordinatensystem die n Größen μ_i berechnen. Da sich jeder kontravariante Vektor x_i, ϱ^i wegen $|{}_{(\alpha)}\lambda^i| \neq 0$ linear durch die n Vektoren (7) in der Form

$$\varrho^i = {}_{(\alpha)}\varrho {}_{(\alpha)}\lambda^i$$

darstellen läßt, wo die ${}_{(\alpha)}\varrho$ Skalare sind, so folgt, daß ${}_{(\alpha)}I {}_{(\alpha)}\varrho = \varrho^i \mu_i$ eine invariante Linearform des willkürlichen kontravarianten Vektors x_i, ϱ^i des Punktes P ist. Die Koeffizienten sind dann, wie wir zeigten, die Komponenten eines kovarianten Vektors des Punktes P .

Die Sätze A, B und C, die wir im vorigen Paragraphen unmittelbar aus der Definition des kontravarianten Vektors folgerten, gelten unverändert auch für kovariante Vektoren. Denn diese Sätze ergeben sich ja ohne weiteres aus der Tatsache, daß die Transformationsgleichungen in den Komponenten sowohl des kontravarianten als auch des kovarianten Vektors linear und homogen sind. Im kovarianten Vektorraum

$$(9) \quad x_i, \lambda_i$$

des festen Punktes x_i gibt es ebenfalls genau n unabhängige kovariante Vektoren

$$(10) \quad x_i, {}_{(\alpha)}\mu_i.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung der Unabhängigkeit der n Vektoren (10) ist

$$(11) \quad D({}_{(\alpha)}\mu_i) = \begin{vmatrix} (1)\mu_1 & (1)\mu_2 & \dots & (1)\mu_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n)\mu_1 & (n)\mu_2 & \dots & (n)\mu_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Jeder weitere kovariante Vektor x_i, ν_i des Punktes x_i ist dann linear durch die Vektoren (10) darstellbar:

$$(12) \quad \nu_i = {}_{(\alpha)}\nu {}_{(\alpha)}\mu_i.$$

§ 4. Adjungierte n -Beine.

Wir beweisen zunächst den Hilfssatz: Gelten für zwei Systeme von je n^2 Größen a_{ik}, b_{ik} , die Gleichungen

$$(1) \quad a_{ik} b_{jk} = \delta_{ij},$$

so ist auch

$$(2) \quad a_{ki} b_{kj} = \delta_{ij}.$$

Wir setzen

$$(3) \quad a_{ki} b_{kj} = c_{ij}$$

und zeigen, daß

$$c_{ij} = \delta_{ij}$$

ist. Durch Multiplikation von (3) mit b_{li} und darauffolgende Summation über die gleichen Indizes i folgt nach (1)

$$(4) \quad \delta_{ki} b_{kj} = c_{ij} b_{li}.$$

Nun können wir links an Stelle von $\delta_{ki} b_{kj} = b_{lj}$ auch $b_{lj} = b_{li} \delta_{ij}$ schreiben;

(4) lautet dann

$$(5) \quad b_{li} (c_{ij} - \delta_{ij}) = 0.$$

Nun ist nach (1) $|a_{ik}| \cdot |b_{jk}| = 1$, also $|b_{jk}| \neq 0$, weshalb aus (5)

$$(6) \quad c_{ij} = \delta_{ij}$$

folgt, w. z. b. w.

Wir nennen ein System von n unabhängigen kovarianten Vektoren eines Punktes P des R_n

$$(7) \quad x_i, {}_{(\alpha)}\mu_i$$

ein kovariantes n -Bein des Punktes P und ebenso ein System von n unabhängigen kontravarianten Vektoren eines Punktes P des R_n

$$(8) \quad x_i, {}_{(\alpha)}\lambda^i$$

ein kontravariantes n -Bein des Punktes P .

Sei das kovariante n -Bein (7) gegeben. Durch die Gleichungen

$$(9) \quad {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\beta)}\lambda^i = \sigma_{\alpha\beta}$$

ist ihm dann eindeutig das kontravariante n -Bein

$$(10) \quad x_i, {}_{(\alpha)}\lambda^i$$

desselben Punktes zugeordnet. Aus (9) können wir nämlich wegen $|{}_{(\alpha)}\mu_i| \neq 0$ in einem willkürlich herausgegriffenen Koordinatensystem die ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ eindeutig berechnen. Dadurch sind in jedem System die Komponenten der n kontravarianten Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ bestimmt. Da das innere Produkt eines kovarianten und eines kontravarianten Vektors invariant ist, so erfüllen die

berechneten Komponenten ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ in jedem zulässigen Koordinatensystem die Relationen (9).

Somit bilden die aus (9) algebraisch bestimmbaren n^2 Größen ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ ein kontravariantes n -Bein.

Gelten zwischen dem kovarianten n -Bein (7) und dem kontravarianten n -Bein (8) des Punktes x_i die Relationen (9), so nennen wir (7) und (8) *adjungierte n -Beine*. Zuzufolge unseres Hilfssatzes gilt neben (9) auch ${}_{(\alpha)}\mu_{\alpha(\nu)}\lambda^\beta = \delta_{\alpha\nu}$ oder bei anderer Bezeichnung der Indizes

$$(11) \quad {}_{(\alpha)}\mu_{i(\alpha)}\lambda^k = \delta_{ik}.$$

Die Gleichungen (11) haben ihrerseits wieder (9) zur Folge.

§ 5. Tensoren.

Die Gesamtheit der Koeffizienten einer Multilinearform mehrerer willkürlicher kovarianter und kontravarianter Vektoren¹⁾ eines Punktes P des R_n heißt *Tensor im Punkt P* , wenn die Form bei Festlegung der Vektoren einen vom Koordinatensystem unabhängigen Wert annimmt. Wir sprechen dann kurz von einer *invarianten Multilinearform*.²⁾ Die Koeffizienten selbst heißen die *Komponenten des Tensors*, dessen Bestimmungsstücke demnach die Koordinaten des Definitionspunktes P und die Komponenten sind. Enthält die Multilinearform a Vektoren, und zwar a_1 kontravariante und a_2 kovariante ($a = a_1 + a_2$), so nennt man den Tensor von a ter Stufe, und zwar kovariant von a_1 ter und kontravariant von a_2 ter Stufe oder a_1 fach kovariant, a_2 fach kontravariant. Ist $a_1 = a$ (und somit $a_2 = 0$), so spricht man von einem *rein kovarianten Tensor a ter Stufe* und analog im Fall $a_2 = a$ ($a_1 = 0$) von einem *rein kontravarianten Tensor a ter Stufe*. In allen anderen Fällen ($0 < a_1 < a$, $0 < a_2 < a$) heißt der Tensor *gemischt*. *Skalare nennt man auch Tensoren nullter Stufe*.

Beispiele: a) Es sei x_i, μ_i ein kovarianter Vektor. Ist dann x_i, λ^i ein willkürlicher kontravarianter Vektor desselben Punktes, so ist die Linearform

$$\mu_i \lambda^i$$

eine Invariante bei Fixierung des Vektors x_i, λ^i . Also ist μ_i ein *kovarianter Tensor erster Stufe*; die Koeffizienten μ_1, \dots, μ_n sind die Komponenten

1) Multilinearform mehrerer Vektoren ist ein in den Komponenten jedes einzelnen Vektors homogenes und lineares Polynom.

2) Da eine Form durch die Gesamtheit ihrer Koeffizienten bestimmt ist und umgekehrt (solange die Veränderlichen, d. h. die Vektorkomponenten *willkürlich* sind), kann man, wenn man will, auch eine Multilinearform willkürlicher Vektoren selbst als Tensor bezeichnen.

dieses Tensors erster Stufe, dessen Bestimmungsstücke demnach x_i, μ_i sind. Ebenso ist der kontravariante Vektor ein kontravarianter Tensor erster Stufe.

b) Sind in P zwei kovariante und ein kontravarianter Vektor gegeben

$$(1) \quad x_i, \lambda_i; x_i, \mu_i; x_i, \nu^i$$

und setzen wir

$$(2) \quad T_{ik}^j = \lambda_i \mu_k \nu^j,$$

so ist bei willkürlichen Vektoren ϱ^i, σ^i und τ_i des Punktes P

$$(3) \quad T_{ik}^j \varrho^i \sigma^k \tau_j = (\lambda_i \varrho^i) (\mu_k \sigma^k) (\nu^j \tau_j)$$

als Produkt dreier Invarianten ebenfalls eine Invariante und somit die T_{ik}^j ein zweifach kovarianter, einfach kontravarianter Tensor dritter Stufe.

Hinsichtlich der Bezeichnung ist zu bemerken, daß Tensorindizes, die an kontravariante Vektoren gebunden sind, *kovariant* heißen und rechts unten gesetzt werden. Indizes, die an kovariante Vektoren gebunden sind, heißen *kontravariant* und werden rechts oben gesetzt. In der zugehörigen Multi-linearform stehen demnach von zwei gleichen Indizes der eine oben und der andere unten.

Zwei Tensoren heißen *gleichartig*, wenn sie gleich viele kovariante und gleich viele kontravariante Indizes haben.

c) Ist $\delta_i^j = \delta_{i,j}$, so sind

$$(4) \quad x_i, \delta_i^j$$

die Bestimmungsstücke eines einfach kovarianten, einfach kontravarianten Tensors zweiter Stufe.

Denn sind ϱ^i und σ_i zwei willkürliche Vektoren des Punktes x_i , so ist

$$(5) \quad \delta_i^j \varrho^i \sigma_j = \varrho^i \sigma_i$$

eine Invariante, w. z. b. w. In der Relation (4, 11) steht links ein Tensor von der Form T_{ik}^k ; nach (5) ist $\delta_{i,k} = \delta_i^k$ ein Tensor gleicher Art. Schreiben wir die erwähnte Relation

$$(6) \quad (\alpha) \mu_i (\alpha) \lambda^k = \delta_i^k,$$

so ist ihre Invarianz unmittelbar einleuchtend.

Ehe wir den allgemeinsten Tensor behandeln, werde als letztes Beispiel der allgemeine gemischte Tensor zweiter Stufe

$$(7) \quad x_i, \beta_i$$

betrachtet. Definitionsgemäß ist

$$(8) \quad \beta_i^k \lambda^i \varrho_k$$

für beliebige Vektoren λ^i und ϱ_i des Punktes P invariant. Bezeichnen wir die Komponenten des Tensors in einem anderen Koordinatensystem $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n)$ ebenfalls mit Querstrichen, so gilt also

$$(9) \quad \beta_i^k \lambda^i \varrho_k = \bar{\beta}_i^k \bar{\lambda}^i \bar{\varrho}_k.$$

Wegen $\bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \lambda^j$ und $\bar{\varrho}_k = \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k} \varrho_l$ folgt aus (9)

$$(10) \quad \left(\beta_j^i - \bar{\beta}_i^k \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k} \right) \lambda^j \varrho_l = 0,$$

was wegen der Willkür in der Wahl der Vektoren λ^i und ϱ_i auf

$$(11) \quad \beta_j^i = \bar{\beta}_i^k \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k}$$

führt. (11) sind die Transformationsgleichungen der Komponenten des gemischten Tensors β_i^k ; sie hätten als Definitionsgleichungen des Tensors dieser Art dienen können. Die Transformationsgleichungen sind in den Komponenten linear und homogen. Auch sieht man, daß in m -Systemen die Aussage, die Komponenten β_i^k seien ϱ -fach stetig differenzierbar, für $\varrho \leq m-1$ sinnvoll ist.

Es seien nun

$$(12) \quad x_i, {}_{(\alpha)}\mu_i; x_i, {}_{(\alpha)}\lambda^i$$

zwei adjungierte n -Beine des Punktes x_i , für die also

$$(13) \quad {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\beta)}\lambda^i = \delta_{\alpha\beta}$$

und

$$(14) \quad {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\alpha)}\lambda^k = \delta_i^k$$

gilt.

Ferner seien ${}_{(\alpha\beta)}b$ vorläufig unbestimmte Skalare im Punkte x_i . Dann sind die Größen

$$(15) \quad \varepsilon_k^i = \beta_k^i - {}_{(\alpha\beta)}b {}_{(\alpha)}\lambda^i {}_{(\beta)}\mu_k$$

die Komponenten eines gemischten Tensors zweiter Stufe im Punkt x_i , da $\varepsilon_k^i \varrho_i \sigma^k$ für beliebige Vektoren ϱ_i und σ^k dieses Punktes invariant ist.

Durch Multiplikation von (15) mit ${}_{(\sigma)}\mu_i {}_{(\tau)}\lambda^k$ und Summation über i und k erhält man

$$(16) \quad \varepsilon_k^i {}_{(\sigma)}\mu_i {}_{(\tau)}\lambda^k = \beta_k^i {}_{(\sigma)}\mu_i {}_{(\tau)}\lambda^k - {}_{(\sigma\tau)}b.$$

Legen wir jetzt die n^2 Skalare ${}_{(\alpha\beta)}b$ fest

$$(17) \quad {}_{(\alpha\beta)}b = \beta_k^i {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\beta)}\lambda^k,$$

so gilt wegen (16)

$$(18) \quad \varepsilon_k^i {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\beta)}\lambda^k = 0,$$

woraus nach Multiplikation mit ${}_{(\alpha)}\lambda^j {}_{(\beta)}\mu_l$ und Summation über α und β

$$(19) \quad \varepsilon_i^i = 0$$

folgt. Umgekehrt hat (19) die Relationen (17) zur Folge.

Es gilt somit die eindeutige Darstellung

$$(20) \quad \beta_k^i = {}_{(\alpha\beta)}b_{(\alpha)}\lambda^i_{(\beta)}\mu_k$$

des Tensors β_k^i mittels der adjungierten n -Beine (12), wobei die n^2 Invarianten ${}_{(\alpha\beta)}b$ durch (17) gegeben sind. Daraus folgt noch, daß das Verschwinden der Tensorkomponenten β_k^i die Relationen ${}_{(\alpha\beta)}b = 0$ zur Folge hat, also vom Bezugssystem (wieder nach (20)) unabhängig ist. Es hat daher Sinn, von *Nulltensoren* β_k^i zu sprechen.

Die für den Tensor x_i , β_k^i gewonnenen Ergebnisse gelten auch für den allgemeinen Tensor

$$(21) \quad x_i, T_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_s}$$

Bilden wir mit Verwendung der adjungierten n -Beine im Punkte x , die Skalare

$$(22) \quad {}_{(\sigma_1 \dots \sigma_r \tau_1 \dots \tau_s)}T = T_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_s} \lambda^{k_1}_{(\sigma_1)} \dots \lambda^{k_r}_{(\sigma_r)} \mu_{(\tau_1)}^{i_1} \dots \mu_{(\tau_s)}^{i_s},$$

so gilt die zu (20) analoge Darstellung

$$(23) \quad T_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_s} = {}_{(\sigma_1 \dots \sigma_r \tau_1 \dots \tau_s)}T_{(\sigma_1)}\mu_{k_1} \dots {}_{(\sigma_r)}\mu_{k_r} {}_{(\tau_1)}\lambda^{i_1} \dots {}_{(\tau_s)}\lambda^{i_s}.$$

Die Darstellung (22), (23) ist eindeutig. Der Beweis ist dem zur Darstellung (20) führenden völlig analog und werde daher übergangen. Aus der Darstellung (23) sind folgende Tatsachen ablesbar:

a) Verschwinden in einem Koordinatensystem die Tensorkomponenten $T_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_s}$, so sind die Skalare (22) alle Null und aus (23) folgt dann das Verschwinden der Tensorkomponenten in jedem Koordinatensystem (*Nulltensor*). Diese Bemerkung ist von Wichtigkeit, weil fast alle geometrischen oder physikalischen Aussagen mathematisch durch das Verschwinden von Tensoren ausgedrückt werden.

b) Sind $T_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_s}$ und $S_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_q}$ die Komponentensysteme *gleichartiger* Tensoren eines Punktes P , so ist die *Tensorsumme*

$$T_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_s} + S_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_q}$$

das Komponentensystem eines Tensors der gleichen Art in P .

c) Sind $T_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_s}$ und $S_{h_1 \dots h_p}^{j_1 \dots j_q}$ zwei beliebige Tensoren eines Punktes P , so ist

$$T_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_s} \cdot S_{h_1 \dots h_p}^{j_1 \dots j_q}$$

das Komponentensystem des „*Produkttensors*“, dessen kovariante bzw. kontravariante Stufenzahl die Summe der entsprechenden Stufenzahlen seiner „*Faktoren*“ ist.

Die Tensoraddition (b) und Multiplikation (c) sind kommutativ und assoziativ, für beide zusammen gilt das distributive Gesetz.

Neben diesen recht selbstverständlichen Operationen gibt es in der Tensorrechnung noch die Operation der „*Tensorverjüngung*“. Sie ist auf gemischte

Tensoren anwendbar und besteht in der Gleichsetzung je eines kovarianten und eines kontravarianten Index und der dann üblichen Summation über diesen.

Setzen wir z. B. in (23) $i_1 = k_1 = j$, so erhalten wir wegen (13)

$$(24) \quad T_{j k_2 \dots k_r}^{j i_2 \dots i_s} = (\sigma_1 \dots \sigma_r \tau_1 \dots \tau_s) T_{(\sigma_2) \mu_{k_2} \dots (\sigma_r) \mu_{k_r} (\tau_2) \lambda^{i_2} \dots (\tau_s) \lambda^{i_s}} \delta_{i_1 \tau_1} \\ = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r \sigma_2 \tau_2 \dots \tau_s) T_{(\sigma_2) \mu_{k_2} \dots (\sigma_r) \mu_{k_r} (\tau_2) \lambda^{i_2} \dots (\tau_s) \lambda^{i_s}}.$$

Das Resultat der Verjüngung ist demnach ein Tensor, dessen kovariante wie kontravariante Stufenzahl um je eins verringert ist. Multiplikation und darauf folgende Verjüngung des Produkttensors heißt „*innere Multiplikation*“ oder „*Überschiebung*“.

Wir werden im folgenden allgemeiner eine Tensormultiplikation mit darauf folgender Summation über gleichbezeichnete Indizes eine Überschiebung nennen, auch wenn diese Indizes keinen tensoriellen Charakter haben, wie

$$({}_\alpha) \lambda^{\alpha} ({}_\alpha) \mu_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

Aus der Darstellung (23) folgt weiter, daß es in m -Systemen sinnvoll ist, von q fach stetig differenzierbaren Tensorkomponenten zu sprechen, wenn $q \leq m - 1$ ist.

Schließlich zeigt (23), daß es genau n^a linear unabhängige gleichartige Tensoren a ter Stufe gibt. Für r fach kovariante, s fach kontravariante Tensoren ist

$$(25) \quad ({}_{\sigma_1}) \mu_{k_1} \dots ({}_{\sigma_r}) \mu_{k_r} ({}_{\tau_1}) \lambda^{i_1} \dots ({}_{\tau_s}) \lambda^{i_s}$$

ein solches System von n^{r+s} linear unabhängigen Tensoren. Wären sie nämlich linear abhängig, so müßte (23) mit $T_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_s} = 0$ und nicht durchwegs verschwindenden $({}_{\sigma_1 \dots \sigma_r \tau_1 \dots \tau_s}) T$ bestehen, was aber einen Widerspruch mit (22) ergäbe.

§ 6. Die Vektorräume eines Punktes P .

Wir haben im vorhergehenden vom n dimensionalen kovarianten und kontravarianten Vektorraum eines Punktes P des R_n gesprochen. Man kann neben diesen auch Vektorräume in P betrachten, deren Dimension kleiner als n ist. Wir definieren¹⁾:

Eine Gesamtheit kontravarianter Vektoren eines Punktes P heißt *kontravarianter Vektorraum* in P , wenn mit dem Vektor x_i, λ^i auch der Vektor $x_i, \sigma \lambda^i$, wo σ ein Skalar ist, und mit den beiden Vektoren x_i, λ^i und x_i, μ^i auch der Vektor $x_i, \lambda^i + \mu^i$ zur Gesamtheit gehört. Der kontravariante Vektor-

1) Wir geben die Definition für kontravariante Vektorräume; die kovarianten Vektorräume und allgemeiner die Tensorräume (bestimmter Art) lassen sich in analoger Weise einführen.

raum ist also eine Gesamtheit kontravarianter Vektoren, in der die Multiplikation mit einem Skalar und die Addition ausführbar sind, d. h. wieder Vektoren der Gesamtheit ergeben.

Wir bringen zwei Beispiele:

1. Ist t^{ik} ein kontravarianter Tensor zweiter Stufe in P , so bildet die Gesamtheit der Vektoren $\lambda^i = t^{ik} \rho_k$, wo ρ_k ein beliebiger kovarianter Vektor des Punktes P ist, einen kontravarianten Vektorraum in P , der im übrigen von dem ähnlich gebildeten Vektorraum $\mu^i = t^{ik} \varrho_k$ wohl zu unterscheiden ist. Die Gesamtheit der kovarianten, durch die Tensorrelation $t^{ik} \mu_k = 0$ definierten Vektoren μ_k des Punktes P bilden einen kovarianten Vektorraum, der wohl zu unterscheiden ist von dem durch $t^{ik} \mu_k = 0$ definierten.

2. Sind $\lambda^i, \mu^i, \dots, \varepsilon^i$ eine endliche Anzahl kontravarianter Vektoren in P , so wird durch sie ein Vektorraum „aufgespannt“, dessen Elemente die Vektoren

$$\alpha \lambda^i + \beta \mu^i + \dots + \tau \varepsilon^i$$

sind, wobei $\alpha, \beta, \dots, \tau$ Skalare bedeuten.

Es sei V ein kontravarianter Vektorraum in P . Aus ihm greifen wir einen Vektor λ^i heraus. Die Gesamtheit der Vektoren $\alpha \lambda^i$, wobei α ein beliebiger Skalar ist, bilden dann selbst einen Vektorraum, der ganz in V liegt, also einen Unterraum oder Teilraum von V , den wir mit $\{\alpha \lambda^i\}$ bezeichnen. Dann ist entweder V mit dem Unterraum $\{\alpha \lambda^i\}$ identisch, oder es gibt in V einen Vektor μ^i , der diesem Unterraum nicht angehört (d. h. dann, daß λ^i und μ^i linear unabhängig sind). Die Vektoren $\alpha \lambda^i + \beta \mu^i$, wo α, β Skalare sind, spannen dann wieder einen Unterraum $\{\alpha \lambda^i + \beta \mu^i\}$ von V aus, der entweder mit V identisch ist oder nicht; im letzteren Fall gibt es einen dritten Vektor ν^i in V , der der Gesamtheit $\alpha \lambda^i + \beta \mu^i$ nicht angehört, d. h. λ^i, μ^i und ν^i sind linear unabhängig. Auf diese Art gelangen wir nach r Schritten zu $r \leq n$ linear unabhängigen Vektoren des Vektorraumes V in P :

$$({}_1)\lambda^i, ({}_2)\lambda^i, \dots, ({}_r)\lambda^i,$$

so daß V mit dem Vektorraum $\{\alpha_1({}_1)\lambda^i + \alpha_2({}_2)\lambda^i + \dots + \alpha_r({}_r)\lambda^i\}$, wo wieder $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ Skalare sind, identisch ist. Der Vektorraum hat dann die Dimension r und wird mit $V^{(r)}$ bezeichnet. Wir zeigen, daß r von der besonderen Wahl der Vektoren $({}_r)\lambda^i$ unabhängig ist. Hat man nämlich auf irgendeine Art ϱ linear unabhängige Vektoren $({}_1)\bar{\lambda}^i, \dots, ({}_q)\bar{\lambda}^i$ gefunden, durch die ebenfalls jeder Vektor von V linear dargestellt wird, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad & ({}_a)\bar{\lambda}^i = ({}_\alpha \beta) {}^i_\beta \lambda^i \\ (2) \quad & ({}_\beta)\lambda^i = ({}_\alpha \beta) {}^i_\alpha \bar{\lambda}^i \end{aligned} \right\} \quad (\alpha=1, 2, \dots, \varrho; \beta=1, 2, \dots, r).$$

Aus (1) folgt, daß die Matrix $\| {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i \|$ keinen höheren, aus (2), daß sie keinen niedrigeren Rang als die Matrix $\| {}_{(\alpha)}\lambda^i \|$ hat¹⁾; also ist der Rang der Matrizen gleich, und da $\| {}_{(\alpha)}\lambda^i \|$ nach Voraussetzung den Rang r hat, so hat auch $\| {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i \|$ diesen Rang, d. h., es muß, da die Vektoren ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i$ ($\alpha = 1, \dots, \varrho$) unabhängig sind, $r = \varrho$ sein, w. z. b. w.

Zwischen den „*r*-Beinen“ ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i$ und ${}_{(\alpha)}\lambda^i$, die den Vektorraum V aufspannen, besteht also stets eine Relation von der Form

$$(3) \quad {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i = {}_{(\alpha\beta)}l^i {}_{(\beta)}\lambda^i, \quad | {}_{(\alpha\beta)}l^i | \neq 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, r).$$

Wir betrachten nun den Vektorraum V des ersten Beispiels. Es sei r der Rang des kontravarianten Tensors zweiter Stufe t^{ik} , d. h. der Rang der Matrix $\| t^{ik} \|$. Dann hat der kontravariante Vektorraum V oder $\lambda^i = t^{ik} \varrho_k$, wobei ϱ_k ein beliebiger kovarianter Vektor in P ist, gerade die Dimension r . Sei nämlich ${}_{(\alpha)}\sigma_k$ ein kovariantes n -Bein in P , so folgt aus $\varrho_k = {}_{(\alpha)}\varrho^{\alpha} {}_{(\alpha)}\sigma_k$, $\lambda^i = {}_{(\alpha)}\varrho^{\alpha} t^{ik} {}_{(\alpha)}\sigma_k$, daß dieser Vektorraum durch die n Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i = t^{ik} {}_{(\alpha)}\sigma_k$ aufgespannt wird. Wegen $| {}_{(\alpha)}\sigma_k | \neq 0$ hat aber $\| {}_{(\alpha)}\lambda^i \|$ denselben Rang wie t^{ik} , also den Rang r . Unter den n Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ gibt es also r unabhängige, somit hat V die Dimension r . Der durch $t^{ik} \mu_k = 0$ definierte kovariante Vektorraum in P hat dagegen, da $\| t^{ik} \|$ den Rang r hat, die Dimension $n - r$.

Wir erhalten also als wichtiges Teilresultat: *Ist t^{ik} ein Tensor zweiter Stufe, so ist der Rang der Matrix $\| t^{ik} \|$ eine Invariante, d. h. vom Koordinatensystem unabhängig.* Entsprechendes gilt von kovarianten Tensoren t_{ik} .

Es sei $V^{(r)}$ ein r dimensionaler kontravarianter Vektorraum in P ; die Gesamtheit der kovarianten Vektoren ξ_i in P , die zu allen Vektoren η^i des $V^{(r)}$ normal stehen, d. h. der Relation $\xi_i \eta^i = 0$ genügen, bildet dann einen $n - r$ dimensionalen kovarianten Vektorraum $V_{(n-r)}$. Ist nämlich ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) ein den $V^{(r)}$ aufspannendes r -Bein, so ist der $V_{(n-r)}$ durch die Tensorrelation

$$(4) \quad {}_{(\alpha)}\lambda^i \xi_i = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r)$$

definiert. Nun steht jeder Vektor η^i des $V^{(r)}$ definitionsgemäß auf jedem Vektor des $V_{(n-r)}$ normal; aber noch mehr: der Vektorraum $V^{(r)}$ läßt sich umgekehrt durch die Gesamtheit der auf den Vektoren des $V_{(n-r)}$ normal stehenden kontravarianten Vektoren definieren.

Die Beziehung zwischen den Vektorräumen $V^{(r)}$ und $V_{(n-r)}$ ist also wechselseitig; wir nennen den einen den *Normalvektorraum* des anderen.

In der Tat, steht η^i auf allen Vektoren des $V_{(n-r)}$ normal, ist also $\eta^i \xi_i = 0$ eine Folge von ${}_{(\alpha)}\lambda^i \xi_i = 0$ ($\alpha = 1, \dots, r$), so gilt $\eta^i = {}_{(\alpha)}\eta^i {}_{(\alpha)}\lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, r$). Dies geht aus folgender Überlegung hervor: Die Gleichungen (4) haben genau

1) Da der Rang eines Produktes zweier Matrizen nicht größer sein kann als der Rang eines Faktors.

$n - r$ linear unabhängige Lösungen ${}_{(\alpha)}\xi_i$ ($\alpha = 1, \dots, n - r$), so daß jeder dem Gleichungssystem (4) genügende Vektor ξ_i die Darstellung $\xi_i = {}_{(\alpha)}\xi_i {}_{(\alpha)}\xi_i$ ($\alpha = 1, \dots, n - r$) hat. Jeder den Gleichungen

$$(5) \quad {}_{(\alpha)}\xi_i \eta^i = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n - r)$$

genügende Vektor η^i erfüllt demnach auch die Gleichungen ${}_{(\alpha)}\xi_i {}_{(\alpha)}\xi_i \eta^i = \xi_i \eta^i = 0$, wo ξ_i ein beliebiger den Gleichungen (4) genügender Vektor ist. Nun hat aber (5) genau r unabhängige Lösungen ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, r$), also ist jeder (5) genügende Vektor $\eta^i = {}_{(\alpha)}\eta_i \lambda^i$, w. z. b. w.

Wir betrachten nun wieder in P den durch

$$(6) \quad \lambda^i = t^{ik} \sigma_k$$

definierten $V^{(r)}$. Die Matrix $\|t^{ik}\|$ habe also den Rang r . Der kovariante Normalvektorraum $V_{(n-r)}$ ist dann durch $t^{ik} \rho_k = 0$ definiert, da $\lambda^i \rho_i = t^{ik} \sigma_k \rho_i$ bei beliebigem Vektor σ_k nur für $t^{ik} \rho_i = 0$ verschwindet.

Die Tensorrelation (6) hat bei gegebenem Vektor λ^i dann und nur dann einen Lösungsvektor σ_k , wenn λ^i ein Vektor des $V^{(r)}$ ist, also mit anderen Worten, wenn λ^i auf dem $V_{(n-r)}$ normal steht. Ist ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ($\alpha = r + 1, \dots, n$) ein diesen $V_{(n-r)}$ aufspannendes $(n - r)$ -Bein, so gilt

$$(7) \quad t^{ik} {}_{(\alpha)}\mu_k = 0$$

und (6) hat dann und nur dann einen Lösungsvektor σ_k , wenn $\lambda^i {}_{(\alpha)}\mu_i = 0$ ($\alpha = r + 1, \dots, n$) gilt. In diesem Fall gibt es einen Lösungsvektor σ_k von (6), der aber, abgesehen vom Fall $r = n$, nicht eindeutig ist. Sind σ_k und $\bar{\sigma}_k$ zwei Lösungsvektoren, gilt also

$$\lambda^i = t^{ik} \sigma_k = t^{ik} \bar{\sigma}_k,$$

so folgt für $\sigma_k - \bar{\sigma}_k = \rho_k$ die Relation

$$(8) \quad t^{ik} \rho_k = 0.$$

Der Lösungsvektor ist also dann bestimmt bis auf einen additiven Vektor des durch (8) definierten kovarianten $(n - r)$ dimensionalen Vektorraumes $\bar{V}_{(n-r)}$.

Soll also (6) bei vorgegebenem λ^i einen Lösungsvektor σ_k haben, so muß λ^i auf dem durch $t^{ik} \mu_k = 0$ definierten kovarianten Vektorraum $V_{(n-r)}$ normal stehen. Dann ist σ_k bis auf einen additiven Vektor des durch $t^{ik} \rho_k = 0$ definierten kovarianten Vektorraumes $\bar{V}_{(n-r)}$ bestimmt.

§ 7. Die Plücker'schen Tensoren eines Vektorraumes.

Es sei der r dimensionale Vektorraum $V^{(r)}$ in P durch die r Vektoren $(\alpha)\lambda^{\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, r$) aufgespannt.

Mit $T^{i_1 \dots i_r}$ bezeichnen wir den Tensor r ter Stufe in P

$$(1) \quad T^{i_1 \dots i_r} = \begin{vmatrix} (1)\lambda^{i_1} & (1)\lambda^{i_2} & \dots & (1)\lambda^{i_r} \\ (2)\lambda^{i_1} & (2)\lambda^{i_2} & \dots & (2)\lambda^{i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (r)\lambda^{i_1} & (r)\lambda^{i_2} & \dots & (r)\lambda^{i_r} \end{vmatrix}$$

den wir den *Plücker'schen Tensor des Vektorraumes $V^{(r)}$* nennen.¹⁾

Beim Übergang zu einem zweiten den $V^{(r)}$ aufspannenden r -Bein

$$(2) \quad (\alpha)\bar{\lambda}^{\alpha} = (\alpha\beta)l_{(\beta)}\lambda^{\alpha}, \quad l = |(\alpha\beta)l| \neq 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, r)$$

erhalten wir

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_r} = l T^{i_1 \dots i_r}.$$

Der PLÜCKER'SCHE Tensor ist also bis auf einen Faktor durch den Vektorraum $V^{(r)}$ bestimmt. Seine Komponenten bezeichnen wir als die homogenen Koordinaten des $V^{(r)}$; sie bestimmen ihrerseits den $V^{(r)}$ eindeutig, da der $V^{(r)}$ durch $T^{i_1 \dots i_r} (\beta)\sigma_{i_2} \dots (\beta)\sigma_{i_r} = \rho^{i_1}$ definiert werden kann ($(\beta)\sigma_{i_2}, \dots, (\beta)\sigma_{i_r}$ beliebig).

Die PLÜCKER'SCHEN Tensoren sind schiefsymmetrisch (alternierend), d. h. bei Vertauschung zweier Indizes ändern die Komponenten das Vorzeichen (vgl. § 8B). Wir wollen jetzt die Frage beantworten, wann umgekehrt ein schiefsymmetrischer Tensor ein PLÜCKER'SCHER Tensor ist, und erledigen zuerst den Fall des Tensors zweiter Stufe. Sei in P durch zwei Vektoren λ_i, μ_i der kovariante Vektorraum $V_{(2)} = \{\lambda_i, \mu_i\}$ aufgespannt. Sein PLÜCKER'SCHER Tensor hat die Komponenten

$$(3) \quad t_{ik} = \lambda_i \mu_k - \lambda_k \mu_i.$$

Aus der Identität

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l \\ \mu_i \mu_j \mu_k \mu_l \\ \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l \\ \mu_i \mu_j \mu_k \mu_l \end{vmatrix} = 0$$

erhalten wir

$$(5) \quad t_{ij}t_{kl} + t_{ik}t_{lj} + t_{il}t_{jk} = 0$$

1) Die Bezeichnung ist in Analogie zu den PLÜCKER'SCHEN Linienkoordinaten gewählt; historisch richtiger wäre es vielleicht, von GRASSMANN'SCHEN Tensoren zu sprechen. — Die im I. Band viel verwendeten ε -Tensoren sind spezielle PLÜCKER'SCHE Tensoren.

als notwendige Relationen, die ein PLÜCKER'SCHER Tensor zweiter Stufe t_{ik} zu erfüllen hat. Den einfachen Nachweis, daß ein Tensor, für den (5) gilt, notwendig schiefssymmetrisch ist, überlassen wir dem Leser.¹⁾

Wir behaupten, daß ein Tensor t_{ik} ein PLÜCKER'SCHER Tensor ist, wenn (5) gilt, d. h. daß die Bedingungen (5) auch hinreichend sind. Wir setzen zum Beweis

$$(6) \quad p_i = t_{ir} a^r, \quad q_i = t_{is} b^s,$$

wo a^i und b^i zwei erst später festzulegende kontravariante Vektoren seien. Wir bilden dann den PLÜCKER'SCHEN Tensor des durch p_i und q_i aufgespannten Vektorraumes $V_{(2)}$

$$p_i q_k - p_k q_i = (t_{ir} t_{ks} - t_{is} t_{kr}) a^r b^s$$

und daraus wegen (5) und $t_{ik} = -t_{ki}$

$$(7) \quad p_i q_k - p_k q_i = (t_{ir} t_{ks} + t_{is} t_{rk}) a^r b^s = -t_{ik} t_{sr} a^r b^s = \pi^{-1} t_{ik},$$

wo $\pi^{-1} = -t_{sr} a^r b^s$ gesetzt ist. Da t_{sr} nicht identisch verschwinden soll, kann man die zwei Vektoren a^i und b^i stets so bestimmen, daß $\pi^{-1} \neq 0$ wird. Dann gilt aber

$$(8) \quad t_{ik} = \pi(p_i q_k - p_k q_i) = p_i \bar{q}_k - p_k \bar{q}_i,$$

wo $\bar{q}_i = \pi q_i$ ist, d. h. t_{ik} ist in der Tat ein PLÜCKER'SCHER Tensor.

Wir gehen nun an die Erledigung derselben Aufgabe für alternierende Tensoren dritter Stufe. Die dabei nötigen Überlegungen führen ganz entsprechend auch im allgemeinen Fall, d. i. bei Tensoren beliebiger Stufe zum Ziel.

Es sei $V_{(3)}$ ein durch drei kovariante Vektoren a_i , b_i und c_i in P aufgespannter Vektorraum. Sein PLÜCKER'SCHER Tensor hat die Komponenten

$$(9) \quad t_{ikl} = \begin{vmatrix} a_i a_k a_l \\ b_i b_k b_l \\ c_i c_k c_l \end{vmatrix}.$$

Es sei nun p^{kl} ein beliebiger Tensor in P . Dann ist

$$(10) \quad \varrho_i = t_{ikl} p^{kl} = \alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i$$

und somit

$$(11) \quad - \begin{vmatrix} a_i a_j a_k a_l \\ b_i b_j b_k b_l \\ c_i c_j c_k c_l \\ \varrho_i \varrho_j \varrho_k \varrho_l \end{vmatrix} = \varrho_i t_{jkli} - \varrho_j t_{kili} + \varrho_k t_{lijj} - \varrho_l t_{ijjk} = 0.$$

Setzt man hier für $\varrho_i = t_{irs} p^{rs}$ ein, so erhält man infolge der Willkür des Tensors p^{rs}

1) Man setze in (5) $j = k = l$ und hierauf $k = l$.

$$(12) \quad t_{jkl}t_{irs} - t_{kll}t_{jrs} + t_{lij}t_{krs} - t_{ijk}t_{irs} = 0$$

als notwendige Bedingungen.

Wir zeigen wieder, daß die Gleichungen (12) auch hinreichend sind, damit ein alternierender Tensor t_{ikl} ein PLÜCKERScher Tensor ist. Setzen wir

$$(13) \quad t_{ikl}d^i = b_{kl}, \quad t_{ikl}c^{kl} = a_i,$$

wo c^{kl} und d^i vorläufig noch unbestimmte Tensoren sind, so ist b_{kl} bereits ein PLÜCKERScher Tensor; überschieben wir nämlich (12) mit $d^i d^s$, so erhalten wir

$$(14) \quad b_{jk}b_{ir} + b_{ki}b_{jr} + b_{ij}b_{kr} = 0.$$

Also gilt

$$b_{kl} = \varrho_k \sigma_l - \varrho_l \sigma_k.$$

Nun bilden wir den PLÜCKERSchen Tensor

$$(15) \quad \begin{vmatrix} a_i a_k a_l \\ \varrho_i \varrho_k \varrho_l \\ \sigma_i \sigma_k \sigma_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i b_{kl} + a_k b_{li} + a_l b_{ik} \\ (t_{rpk}t_{rqa} - t_{kli}t_{rpa} + t_{lir}t_{kpa} - t_{irk}t_{lpa} + t_{kli}t_{rpa}) \\ = t_{kli}t_{rpa} c^{pa} d^r = \pi^{-1} t_{kli}. \end{vmatrix} c^{pa} d^r$$

Setzt man $c^{pa} = c^{pfa}$, so wird $\pi^{-1} = t_{rpa} c^{pfa} d^r$, und es kann, sobald t_{rpa} nicht identisch verschwindet, c^p , f^a , d^r so gewählt werden, daß $\pi^{-1} \neq 0$ wird. Dann gilt aber

$$t_{ikl} = \pi \begin{vmatrix} a_i a_k a_l \\ \varrho_i \varrho_k \varrho_l \\ \sigma_i \sigma_k \sigma_l \end{vmatrix}.$$

Im R_4 gibt es nur eine nicht triviale Relation, der ein alternierender Tensor t_{ik} zu genügen hat, wenn er ein PLÜCKERScher Tensor sein soll, nämlich

$$(16) \quad t_{12}t_{34} + t_{13}t_{42} + t_{14}t_{23} = 0.$$

Ist dann a_{ik} ein beliebiger schiefsymmetrischer Tensor, so kann man a_{ik} auf unendlich viele Arten als Summe zweier PLÜCKERSchen Tensoren darstellen; man zeige dies unter Verwendung von (16).

Es gilt der allgemeine Satz, daß sich im R_n jeder alternierende Tensor t_{ik} $2r$ ter Stufe (der Rang einer schiefsymmetrischen Matrix $\|t_{ik}\|$ ist stets gerade!) als Summe von r PLÜCKERSchen Tensoren darstellen läßt.¹⁾

§ 8. Bemerkungen und Beispiele zur Tensoralgebra.

A. Koordinaten im R_n . Sind n m fach stetig differenzierbare Funktionen der Punkte des R_n

$$(1) \quad \Phi_1(P), \Phi_2(P), \dots, \Phi_n(P)$$

1) Einen Beweis gab H. HORNICH, ein Hörer des Verfassers. Zu dem vorstehenden vgl. auch J. LENSE, Monatshefte f. Math. u. Phys. 30 (1921), S. 155—157.

gegeben, so ordnen sie jedem Punkt P ein Zahlen- n -tupel $x_i = \Phi_i(P)$ zu. Ist in dem betrachteten Teilgebiet des R_n die so definierte Zuordnung der Punkte und Zahlen- n -tupel ein-eindeutig, so sind die $x_i = \Phi_i(P)$ Koordinaten eines m -Systems in diesem Teilgebiet, z. B. kann man im physikalischen R_3 als solche irgend drei voneinander unabhängige Skalare wählen (Temperatur, Potential, Entfernung von einem Fixpunkt u. dgl.¹⁾

B. Symmetrische und alternierende Tensoren. Wir zeigen, daß es sinnvoll ist, von symmetrischen und schief-symmetrischen oder alternierenden Tensoren zu sprechen. Gilt nämlich in einem Punkt P und in irgendeinem zulässigen Koordinatensystem $g_{ik} - g_{ki} = 0$ bzw. $g_{ik} + g_{ki} = 0$, so gilt diese Relation auch in jedem anderen zulässigen Koordinatensystem. Denn mit g_{ik} ist auch $h_{ik} = g_{ki}$ das Koeffizientensystem einer invarianten Linearform zweier willkürlicher kontravarianter Vektoren. Somit sind die h_{ik} die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe, also $g_{ik} - h_{ik} = 0$ bzw. $g_{ik} + h_{ik} = 0$ eine Tensorrelation, w. z. b. w.

Im übrigen folgt dies auch aus der Beindarstellung

$$(2) \quad g_{ik} = {}_{(\alpha\beta)}g \quad {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\beta)}\mu_k,$$

wo

$${}_{(\alpha\beta)}g = g_{ik} {}_{(\alpha)}\lambda^i {}_{(\beta)}\lambda^k$$

ist. Gilt ${}_{(\alpha\beta)}g = {}_{(\beta\alpha)}g$, so ist g_{ik} symmetrisch, im Fall ${}_{(\alpha\beta)}g = -{}_{(\beta\alpha)}g$ ist g_{ik} schief-symmetrisch und umgekehrt.

Es ist ebenso sinnvoll von allgemeinen Tensoren mit gewissen Symmetrieeigenschaften zu sprechen, z. B. ist $T_{ikl} = T_{kli}$ eine sinnvolle Relation. Man zeige dagegen, daß $\beta_i^i = \beta_k^k$ im allgemeinen sinnlos ist.

C. Adjungierte Tensoren. Ist t_{ik} ein Tensor zweiter Stufe vom Rang n , d. h., ist $|t_{ik}| \neq 0$, so existiert der *adjungierte* kontravariante Tensor zweiter Stufe t^{ik} , der durch die Tensorrelation

$$(3) \quad t_{ik} t^{il} = \delta_k^l$$

definiert ist. Da $|t_{ik}| \neq 0$ ist, kann man in einem zulässigen Koordinatensystem die Komponenten des Tensors t^{il} eindeutig berechnen; (3) ist eine Tensorrelation, und daher genügt der Tensor t^{ik} diesen Gleichungen in jedem zulässigen Koordinatensystem.

1) Was eine m -fach stetig differenzierbare Funktion der Punkte eines R_n genannt wird, ist letzten Endes Konvention. Ist man übereingekommen, aus der Gesamtheit aller Funktionen n derartige auszuwählen, z. B. die n Funktionen (1), so bestimmen diese jetzt die Gesamtheit der q -fach ($q \leq m$) stetig differenzierbaren Funktionen und die zulässigen m -Systeme.

Der so gewonnene adjungierte Tensor t^{ik} von t_{ik} ist symmetrisch, wenn t_{ik} symmetrisch ist. In der Tat folgt aus (3)

$$t_{ik} t^{li} = \delta_k^l$$

so wie (4, 2) aus (4, 1); also gilt, wenn $t_{ik} = t_{ki}$ ist, auch

$$t_{ik} t^{li} = \delta_k^l.$$

Da $|t_{ik}| \neq 0$ ist, folgt daraus und aus (3) sofort $t^{li} = t^{il}$.

D. Ein Satz über die Koeffizienten quadratischer Formen. Ist $a_{ik} \varrho^i \varrho^k$ eine invariante quadratische Form eines beliebigen Vektors x_i , ϱ^i eines Punktes $P(x_i)$, so ist $x_i, a_{ik} + a_{ki}$ ein Tensor zweiter Stufe in P .

Wir haben zu zeigen, daß $(a_{ik} + a_{ki}) \varrho^i \sigma^k$ für beliebige Vektoren ϱ^i und σ^k des Punktes P invariant ist, was unmittelbar aus der Identität

$$(4) \quad a_{ik} (\varrho^i + \sigma^i) (\varrho^k + \sigma^k) - a_{ik} \varrho^i \varrho^k - a_{ik} \sigma^i \sigma^k = (a_{ik} + a_{ki}) \varrho^i \sigma^k \quad \text{folgt.}$$

E. Die Beindarstellung von Tensoren zweiter Stufe. Es sei jetzt t_{ik} ein kovarianter Tensor zweiter Stufe in P . Hat dann die Matrix $\|t_{ik}\|$ den Rang r , so ist nach § 6 durch

$$(5) \quad \mu_i = t_{ik} \sigma^k,$$

wo σ^k ein willkürlicher kontravarianter Vektor in P ist, ein r dimensionaler kovarianter Vektorraum $V_{(r)}$ definiert.

Es sei $(\alpha) \mu_i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) ein diesen $V_{(r)}$ aufspannendes r -Bein. Wir ergänzen es durch geeignete weitere $n - r$ Vektoren $(\alpha) \mu_i$ ($\alpha = r + 1, \dots, n$) zu einem n -Bein, dessen adjungiertes mit $(\alpha) \lambda^i$ bezeichnet werde. Es gilt die Darstellung

$$(6) \quad t_{ik} = (\alpha \beta) t_{(\alpha) \mu_i (\beta) \mu_k},$$

wo $(\alpha \beta) t_{(\alpha) \mu_i (\beta) \mu_k} = t_{ik} (\alpha) \lambda^i (\beta) \lambda^k$ ist. Nun ist $t_{ik} (\beta) \lambda^k$ ein Vektor des $V_{(r)}$, also ist $t_{i, k(\beta)} \lambda^k = (\gamma) \mu_i (\gamma) \mu_i$ ($\gamma = 1, \dots, r$) und wegen $(\gamma) \mu_i (\alpha) \lambda^i = \delta_{\alpha \gamma}$ muß $(\alpha \beta) t_{(\alpha) \mu_i (\beta) \mu_k} = 0$ sein, sobald $\alpha > r$ ist. Wir können also statt (6)

$$(7) \quad t_{ik} = (\alpha) \mu_i (\alpha) \nu_k \quad (\alpha = 1, \dots, r)$$

schreiben, wo $(\alpha) \nu_k = (\alpha \beta) t_{(\beta) \mu_i (\beta) \mu_k}$ ($\alpha = 1, \dots, r; \beta = 1, \dots, n$) ist. In (7) sind die $(\alpha) \nu_k$ ($\alpha = 1, \dots, r$) ebenfalls linear unabhängig. Im Fall der Abhängigkeit könnte man z. B. $(r) \nu_k$ durch die übrigen linear darstellen; es wäre dann $(r) \nu_k = (\alpha) \nu_k (\alpha) \nu_k$ ($\alpha = 1, \dots, r - 1$) und man erhielte somit statt (7) die Darstellung

$$(8) \quad t_{ik} = (\alpha) \mu_i + (\alpha) \nu_{(r) \mu_i} (\alpha) \nu_k \quad (\alpha = 1, \dots, r - 1).$$

Dann wäre aber der $V_{(r)}$ bereits durch die $r - 1$ Vektoren $(\alpha) \mu_i + (\alpha) \nu_{(r) \mu_i}$ ($\alpha = 1, \dots, r - 1$) aufgespannt.

F. Die kanonische Darstellung des symmetrischen Tensors zweiter Stufe. Es sei jetzt t_{ik} symmetrisch und vom Rang r . Die Darstellung (6) gilt dann, wenn das n -Bein $(\alpha)\mu_i$ wie in E definiert ist, mit $(\alpha\beta)^t = 0$ für $\alpha > r$. Wegen $(\alpha\beta)^t = (\beta\alpha)^t$ ist hier aber $(\alpha\beta)^t = 0$ auch für $\beta > r$.

Die Determinante $|\alpha\beta)^t|$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, r$) ist nicht Null, da sonst nach (6) t_{ik} einen kleineren Rang als r hätte.

Wir bezeichnen mit $V^{(n-r)}$ den von den Vektoren $(\alpha)\lambda^i$ ($\alpha = r+1, \dots, n$) aufgespannten Normalvektorraum des schon oben definierten $V_{(r)} \equiv \{(\alpha)\mu_i\}$ ($\alpha = 1, \dots, r$) und mit $V^{(r)}$ einen solchen Vektorraum $\{(\alpha)\lambda^i\}$ ($\alpha = 1, \dots, r$), daß $(\alpha)\lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, n$) ein n -Bein ist. Wir ersetzen nun das n -Bein $(\alpha)\mu_i$ durch das zu $(\alpha)\lambda^i$ adjungierte, dessen r erste Vektoren ja ebenfalls den $V_{(r)}$ aufspannen und das wir wieder mit $(\alpha)\mu_i$ bezeichnen. Nun zeigen wir noch, daß die r Vektoren $(\alpha)\lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) im $V^{(r)}$ so gewählt werden können¹⁾, daß

$$(9) \quad (\alpha\alpha)^t = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r-1) \quad \text{und} \quad (rr)^t = \pm 1 \quad (\text{nicht summieren über } r)$$

ist.

Es muß im $V^{(r)}$ einen Vektor ϱ^i geben, so daß $t_{ik}\varrho^i\varrho^k \neq 0$ ist. Denn jeder beliebige kontravariante Vektor $\sigma^i = (\alpha)\sigma_{(\alpha)}\lambda^i$ läßt sich in einen Vektor ϱ^i des $V^{(r)}$ und in einen Vektor τ^i des $V^{(n-r)}$ so zerlegen, daß $\sigma^i = \varrho^i + \tau^i$ gilt. Da aber $t_{ik}\tau^i = 0$ ist (Definition des $V^{(n-r)}$), so gilt $t_{ik}\sigma^i\sigma^k = t_{ik}\varrho^i\varrho^k$. Ist aber $r > 0$, so gibt es zumindest einen Vektor σ^i , für den $t_{ik}\sigma^i\sigma^k \neq 0$ gilt, und somit auch einen Vektor ϱ^i derselben Eigenschaft. Ist also dann ϱ^i der Vektor des $V^{(r)}$, für den $t_{ik}\varrho^i\varrho^k \neq 0$ ist, so setzen wir $(r)\lambda^i = \sigma\varrho^i$ und bestimmen den Skalar σ so, daß $(rr)^t = t_{ik}(r)\lambda^i(r)\lambda^k = \sigma^2 t_{ik}\varrho^i\varrho^k = \pm 1$ wird (es muß jedenfalls $\text{sign}(rr)^t = \text{sign} t_{ik}\varrho^i\varrho^k$ sein, weil σ reell ist).

Um zu $(\alpha\alpha)^t = 0$ ($\alpha = 1, \dots, r-1$) zu gelangen, wählen wir im $V^{(r)}$ die r unabhängigen Vektoren

$$\begin{cases} (\alpha)\bar{\lambda}^i = (\alpha)\alpha_{(r)}\lambda^i + (\alpha)\lambda^i \\ (r)\bar{\lambda}^i = (r)\lambda^i \end{cases} \quad (\alpha = 1, \dots, r-1)$$

und bestimmen die $(\alpha)\alpha$ aus

$$(10) \quad 0 = t_{ik}(\alpha)\bar{\lambda}^i(r)\bar{\lambda}^k = \pm (\alpha)\alpha + t_{ik}(\alpha)\lambda^i(r)\lambda^k$$

in eindeutiger Weise. In der neuen Darstellung gilt dann (9).

Wir bilden jetzt den symmetrischen kovarianten Tensor

$$(11) \quad \bar{t}_{ik} = t_{ik} - (rr)^t (r)\mu_i (r)\mu_k = (\alpha\beta)^t (\alpha)\mu_i (\beta)\mu_k \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, r-1)$$

1) Der $V^{(r)}$ ist in hohem Grade willkürlich. Er muß nur von r Vektoren aufgespannt sein, die mit denen des $V^{(n-r)}$ den $V^{(n)}$ in P aufspannen. Eine Änderung des r -Beins $(\alpha)\lambda^i$ im $V^{(r)}$ hat bei festem $(r+1)\lambda^i, \dots, (\alpha)\lambda^i$ natürlich eine Änderung der r Vektoren $(\gamma)\mu_i$ ($\gamma = 1, \dots, r$) des $V_{(r)}$ zur Folge: $(\gamma)\mu_i(\alpha)\lambda^i = \delta_{\gamma\alpha}$.

Da (11) nach ${}_{(\alpha\beta)}t$ auflösbar ist (${}_{(\alpha\beta)}t = \bar{t}_{ik(\alpha)}\lambda^i{}_{(\beta)}\lambda^k$), ist der Rang von $\|\bar{t}_{ik}\|$ gleich dem Rang der Matrix $\|{}_{(\alpha\beta)}t\|$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, r-1$), also gleich $r-1$.

Ist $r=1$, so ist $\bar{t}_{ik} = 0$, d. h., es gilt $t_{ik} = {}_{(11)}t{}_{(1)}\mu_i{}_{(1)}\mu_k$ mit ${}_{(11)}t = \pm 1$. Gilt für $\rho \leq r-1$ die kanonische Darstellung eines Tensors τ_{ik} vom Range ρ :

$$(12) \quad \tau_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{\rho} {}_{(\alpha\alpha)}\tau {}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i{}_{(\alpha)}\bar{\mu}_k, \quad ({}_{\alpha\alpha})\tau = \pm 1,$$

mit ρ unabhängigen Vektoren ${}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i$, so folgt aus (11) die Richtigkeit der kanonischen Darstellung für $\rho = r$. Da sie für $r=1$ richtig ist, so gilt sie demnach für beliebiges $r=1, \dots, n$.

G. Das Trägheitsgesetz der symmetrischen Tensoren. Es seien

$$(13) \quad t_{ik} = \sum_{\alpha=1}^r {}_{(\alpha\alpha)}t {}_{(\alpha)}\mu_i{}_{(\alpha)}\mu_k = \sum_{\alpha=1}^r {}_{(\alpha\alpha)}\bar{t} {}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i{}_{(\alpha)}\bar{\mu}_k$$

zwei kanonische Darstellungen des symmetrischen Tensors zweiter Stufe t_{ik} vom Rang r , in denen die Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ bzw. ${}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i$ bereits so geordnet sind, daß

$$\begin{cases} {}_{(\alpha\alpha)}t = +1 & \text{für } \alpha = 1, \dots, u \\ {}_{(\alpha\alpha)}t = -1 & \text{für } \alpha = u+1, \dots, r \end{cases} \quad \begin{cases} {}_{(\alpha\alpha)}\bar{t} = +1 & \text{für } \alpha = 1, \dots, v \\ {}_{(\alpha\alpha)}\bar{t} = -1 & \text{für } \alpha = v+1, \dots, r \end{cases}$$

gelte. Das Trägheitsgesetz behauptet dann die Gleichheit von u und v .

Ist $u \neq v$, z. B. $u - v > 0$, so betrachten wir im $V_{(r)} \{ {}_{(\alpha)}\mu_i \}$ oder $\{ {}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i \}$ ($\alpha = 1, \dots, r$)¹⁾ den Vektorraum M , der durch die Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ($\alpha = u+1, \dots, r$) und ${}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i$ ($\alpha = 1, \dots, v$) aufgespannt wird und dessen Dimension höchstens gleich $v + r - u = r - (u - v)$, also jedenfalls kleiner als r ist. Der Vektorraum M ist ein echter Unterraum des $V_{(r)}$; es gibt also mindestens einen kontravarianten Vektor ϱ^i , der auf allen Vektoren des Vektorraumes M , aber nicht auf allen Vektoren des Vektorraumes $V_{(r)}$ normal steht. Für ihn gilt

$$(14) \quad t_{ik} \varrho^i \varrho^k = \sum_{\alpha=1}^u {}_{(\alpha\alpha)}t ({}_{(\alpha)}\mu_i \varrho^i)^2 = \sum_{\alpha=1}^u ({}_{(\alpha)}\mu_i \varrho^i)^2 > 0$$

nach der ersten Darstellung (13), weil nicht alle ${}_{(\alpha)}\mu_i \varrho^i = 0$ sein können, da sonst ϱ^i Normalvektor des $V_{(r)}$ wäre. Aus der zweiten Darstellung (13) folgt

1) Die Vektorräume $\{ {}_{(\alpha)}\mu_i \}$ und $\{ {}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i \}$ ($\alpha = 1, \dots, r$) sind auch wegen (13) identisch. Aus (13) folgt nämlich, wenn man ${}_{(\alpha)}\mu_i$ zu einem n -Bein ergänzt, zu dem ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ das adjungierte ist,

$${}_{(\beta\beta)}\bar{t} {}_{(\beta)}\bar{\mu}_i = \sum_{\alpha=1}^r {}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i ({}_{\alpha\alpha})\bar{t} {}_{(\alpha)}\bar{\mu}_k ({}_{\beta\beta})\lambda^k \quad (\text{nicht summieren über } \beta!).$$

${}_{(\beta\beta)}\bar{t}$ ist also durch ${}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i$ dargestellt, und analog zeigt man, daß die ${}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i$ durch die ${}_{(\alpha)}\mu_i$ linear darstellbar sind.

$$(15) \quad t_{ik} \varrho^i \varrho^k = \sum_{\alpha=v+1}^r (\alpha \alpha)^t (\alpha) \bar{\mu}_i \varrho^i)^2 = - \sum_{\alpha=v+1}^r (\alpha) \bar{\mu}_i \varrho^i)^2 < 0,$$

was mit (14) verglichen einen Widerspruch ergibt. Also muß $u = v$ sein, w. z. b. w.

H. Definite, halbdefinite und indefinite symmetrische Tensoren zweiter Stufe.
Es werde wieder die kanonische Darstellung des symmetrischen Tensors zweiter Stufe

$$t_{ik} = \sum_{\alpha=1}^r (\alpha \alpha)^t (\alpha) \mu_{i(\alpha)} \mu_{k(\alpha)}; \quad (\alpha \alpha)^t = \pm 1$$

betrachtet. Ergänzen wir die r Vektoren $(\alpha) \mu_i$ zu einem kovarianten n -Bein und bezeichnen wir mit $(\alpha) \lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, n$) das zu diesem adjungierte kontravariante n -Bein, so folgt aus den Formeln der Beindarstellung (13)

$$(16) \quad \begin{cases} t_{ik} (\alpha) \lambda^i (\beta) \lambda^k = 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \text{ und } \alpha > r \text{ oder } \beta > r \\ t_{ik} (\alpha) \lambda^i (\alpha) \lambda^k = (\alpha \alpha)^t & (\alpha = 1, \dots, r; \text{ über } \alpha \text{ nicht summieren!}). \end{cases}$$

Setzen wir

$$(\alpha) \lambda^i = t_{ik} (\alpha) \lambda^k \quad (\alpha = 1, \dots, n),$$

so folgt $(\alpha) \lambda^i (\beta) \lambda^i = 0$ mit Ausnahme von $(\alpha) \lambda^i (\alpha) \lambda^i = \left\{ \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \right\}$, wenn $\left\{ \begin{matrix} (\alpha \alpha)^t = +1 \\ (\alpha \alpha)^t = -1 \end{matrix} \right\}$ ist. Es ist somit

$$(17) \quad (\alpha) \lambda_{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} + (\alpha) \mu_{\alpha} \\ - (\alpha) \mu_{\alpha} \end{matrix} \right\} \quad (\alpha = 1, \dots, r),$$

wenn $\left\{ \begin{matrix} (\alpha \alpha)^t = +1 \\ (\alpha \alpha)^t = -1 \end{matrix} \right\}$ ist.

Die Tensoren t_{ik} , in deren kanonischer Darstellung alle $(\alpha \alpha)^t = +1$ bzw. alle $(\alpha \alpha)^t = -1$ sind, mögen für $r < n$ *halbdefinit*, für $r = n$ *definit* heißen, und zwar positiv halbdefinit bzw. definit, wenn $(\alpha \alpha)^t = +1$ ist, und negativ halbdefinit bzw. definit, wenn $(\alpha \alpha)^t = -1$ ist. Alle übrigen Tensoren t_{ik} nennen wir *indefinit*. Ein symmetrischer, positiv halbdefiniter bzw. definiter Tensor t_{ik} vom Range r hat die kanonische Darstellung

$$(18) \quad t_{ik} = (\alpha) \mu_{i(\alpha)} \mu_{k(\alpha)} \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

Sei nun $t_{ik} = (\alpha) \bar{\mu}_i (\alpha) \bar{\mu}_k$ eine zweite kanonische Darstellung. Das zu $(\alpha) \bar{\mu}_i$ adjungierte n -Bein werde mit $(\alpha) \bar{\lambda}^i$ und das zu $(\alpha) \mu_i$ adjungierte mit $(\alpha) \lambda^i$ bezeichnet. Aus

$$(19) \quad (\alpha) \mu_{i(\alpha)} \mu_{k(\alpha)} = (\alpha) \bar{\mu}_i (\alpha) \bar{\mu}_k \quad (\alpha = 1, \dots, r)$$

erhalten wir durch Überschiebung mit $(\beta) \lambda^k$

$$(20) \quad (\beta) \bar{\mu}_i = (\alpha) \mu_{k(\beta)} (\beta) \bar{\lambda}^k (\alpha) \mu_i = (\beta \alpha) C (\alpha) \mu_i \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, r),$$

wobei die $(\beta \alpha) C$ eine orthogonale Matrix bilden. Tatsächlich gilt

$$(21) \quad (\beta \alpha) C (\gamma \alpha) C = (\alpha) \mu_{k(\beta)} (\beta) \bar{\lambda}^k (\alpha) \mu_{i(\gamma)} (\gamma) \bar{\lambda}^i = t_{ik} (\beta) \bar{\lambda}^k (\gamma) \bar{\lambda}^i = (\beta \gamma)^t = \delta_{\beta \gamma}.$$

II. Tensoranalysis.

§ I. Die tensorielle Ableitung.

Die bisher betrachteten Operationen der Tensoralgebra, also Addition gleichartiger, Multiplikation und Verjüngung beliebiger Tensoren *eines* Punktes P des R_n sind *tensoriellen Charakters*, d. h. sie führen stets wieder zu Tensoren des Punktes P .

Ist dagegen z. B.

$$(1) \quad x_1(s), \dots, x_n(s); \lambda^1(s), \dots, \lambda^n(s)$$

ein in allen Punkten der stetig differenzierbaren Kurve $x_i = x_i(s)$ definierter, stetig differenzierbarer kontravarianter Vektor, so folgt aus seinen Transformationsformeln

$$(2) \quad \bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n); \bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \lambda^k$$

durch Differentiation nach s das Transformationsgesetz

$$(3) \quad \frac{d\bar{\lambda}^i}{ds} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \frac{d\lambda^k}{ds} + \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_k \partial x_l} \frac{dx_l}{ds} \lambda^k$$

für die Ableitungen der Komponenten λ^i des Vektors (1), die somit im allgemeinen nicht mehr die Komponenten eines Vektors sind.¹⁾

Es wird daher von Wichtigkeit sein, eine die gewöhnliche Ableitung ersetzende *tensorielle Ableitung* zu definieren, was im folgenden mit Hilfe eines in allen Punkten des R_n definierten n -Beins durchgeführt wird.

Es sei in allen Punkten des auf ein m -System (I, § 1) bezogenen R_n das $m - 1$ mal stetig differenzierbare kovariante n -Bein

$$(4) \quad x_i, {}_{(\alpha)}\mu_i(x_1, \dots, x_n)$$

gegeben.²⁾ Nach Voraussetzung ist in jedem Punkt des R_n die Determinante

$$(5) \quad |{}_{(\alpha)}\mu_i| \neq 0.$$

Durch die Tensorrelationen

$$(6) \quad {}_{(\alpha)}\mu_i({}_\beta)\lambda^i = \delta_{\alpha\beta}, \quad {}_{(\alpha)}\mu_i({}_\alpha)\lambda^k = \delta_i^k$$

1) Das ist nur dann der Fall, wenn $\frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_k \partial x_l} = 0$ ist, also bei den affinen Transformationen $\bar{x}_i = a_{ik}x_k + b_i$. Die Differentiation ist also nur innerhalb der affinen Gruppe ein tensorieller Prozeß. (Die Überlegung gilt unverändert für beliebige Tensoren.)

2) Beispielsweise kann in einem bestimmten m -System ${}_{(\alpha)}\mu_i = \delta_{i\alpha}$ sein.

ist dann in allen Punkten des R_n das zu (4) adjungierte kontravariante n -Bein

$$(7) \quad x_i, \quad {}_{(\alpha)}\lambda^i(x_1, \dots, x_n)$$

definiert, und zwar sind die Komponenten ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ ebenfalls $m - 1$ mal stetig differenzierbar. Ferner sei durch

$$(8) \quad x_i = x_i(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$$

eine stetig differenzierbare l dimensionale Mannigfaltigkeit F_l des R_n und in allen ihren Punkten der stetig differenzierbare kontravariante Vektor

$$(9) \quad x_i(\sigma_1, \dots, \sigma_l), \quad \varrho^i(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$$

gegeben. Dann kann man in den Punkten der F_l die n stetig differenzierbaren Skalare

$$(10) \quad {}_{(\alpha)}\mu_i(x_1(\sigma \dots), \dots, x_n(\sigma \dots)) \varrho^i(\sigma \dots) = {}_{(\alpha)}\Phi(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$$

bilden. ${}_{(\alpha)}\Phi$ hängt nur von den Punkten der $F_l(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ ab und ist invariant in bezug auf die Transformation der Raumkoordinaten x_1, \dots, x_n . Daher ist auch

$$(11) \quad d_{{}_{(\alpha)}\Phi} = \frac{\partial {}_{(\alpha)}\Phi}{\partial \sigma_h} d\sigma_h = {}_{(\alpha)}\mu_i d\varrho^i + \varrho^i \frac{\partial {}_{(\alpha)}\mu_i}{\partial x_k} dx_k \quad (h=1, \dots, l)$$

ein System von n Invarianten. Durch Überschiebung von (11) mit ${}_{(\alpha)}\lambda^j$ ergibt sich wegen (6)

$$(12) \quad d\varrho^j + \frac{\partial {}_{(\alpha)}\mu_i}{\partial x_k} {}_{(\alpha)}\lambda^j \varrho^i dx_k = {}_{(\alpha)}\lambda^j d_{{}_{(\alpha)}\Phi} = \beta^j.$$

Setzen wir

$$(13) \quad \frac{\partial {}_{(\alpha)}\mu_i}{\partial x_k} {}_{(\alpha)}\lambda^j = -{}_{(\alpha)}\mu_i \frac{\partial {}_{(\alpha)}\lambda^j}{\partial x_k} = (i k, j),$$

so besagt (12), daß

$$(14) \quad \beta^j = d\varrho^j + (i k, j) \varrho^i dx_k$$

ein kontravarianter Vektor in den Punkten der F_l ist. Wir nennen diesen, aus dem kontravarianten Vektor (9) und den n -Beinen (4) und (7) gebildeten kontravarianten Vektor das *tensorielle Differential des Vektors* (9); es hängt noch von dem im R_n festgewählten n -Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i(x_1, \dots, x_n)$ ab.

Ganz analog läßt sich das tensorielle Differential eines kovarianten Vektors bilden. Ist längs der F_l (8) der stetig differenzierbare kovariante Vektor

$$(15) \quad x_i(\sigma_1, \dots, \sigma_l), \quad \tau_i(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$$

gegeben, so kann man wieder (dual zu (10)) die n Skalare

$$(16) \quad {}_{(\alpha)}\lambda^i(x_1(\sigma \dots), \dots, x_n(\sigma \dots)) \tau_i(\sigma \dots) = {}_{(\alpha)}\Psi(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$$

bilden. Für den Skalar $d_{{}_{(\alpha)}\Psi}$ gibt (16)

$$(17) \quad {}_{(\alpha)}\lambda^i d\tau_i + \tau_i \frac{\partial {}_{(\alpha)}\lambda^i}{\partial x_k} dx_k = d_{{}_{(\alpha)}\Psi},$$

woraus durch Überschiebung mit ${}_{(\alpha)\mu_j}$ wegen (13) und (6)

$$(18) \quad d\tau_j - (j k, i) \tau_i dx_k = \varepsilon_j$$

folgt, wo x_i, ε_i ein kovarianter Vektor im betrachteten Punkt der F_l ist. Ist der kontravariante Vektor (9) bzw. der kovariante (15) in einem Gebiete des R_n (offene Punktmenge) definiert (d. h. ist die F_l (8) ein Gebietsteil des $R_{n,l}$, also $l = n$), so sind die Komponenten dieser Vektoren nach Annahme in dem Gebiete stetig differenzierbare Funktionen der Koordinaten, und es gilt

$$d\rho^j = \frac{\partial \rho^j}{\partial x_k} dx_k \quad \text{bzw.} \quad d\tau_j = \frac{\partial \tau_j}{\partial x_k} dx_k.$$

Dann ist (14): $\beta^j = \left[\frac{\partial \rho^j}{\partial x_k} + (i k, j) \rho^i \right] dx_k$, und da $dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_\tau} d\sigma_\tau$ ($\tau = 1, \dots, n$)

wegen $\left| \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_\tau} \right| \neq 0$ ein willkürlicher kontravarianter Vektor ist, muß

$$(19) \quad \frac{\partial \rho^j}{\partial x_k} + (i k, j) \rho^i = \beta^j_k$$

ein gemischter Tensor zweiter Stufe sein. Ebenso ist

$$(20) \quad \frac{\partial \tau_j}{\partial x_k} - (j k, i) \tau_i = \varepsilon_{jk}$$

ein kovarianter Tensor zweiter Stufe. Wir nennen β^j_k bzw. ε_{jk} die *tensorielle Ableitung* von ρ_j bzw. τ_j (bezüglich des n -Beines ${}_{(\alpha)\mu_i}$).

§ 2. Der Riccikalcul.

Wir denken uns längs einer stetig differenzierbaren F_l

$$x_i = x_i(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$$

stetig differenzierbare Tensoren (die Komponenten sind stetig differenzierbare Funktionen von $\sigma_1, \dots, \sigma_l$) beliebiger Stufe definiert, für die wir die tensorielle Ableitung durch das folgende System von Forderungen einführen; ist dabei $U^{\cdot\cdot}$ (die Punkte deuten Indizes an) ein solcher Tensor, so bezeichne $\flat U^{\cdot\cdot}$ sein tensorielles Differential.

Für das tensorielle Differential mögen die folgenden vier Gesetze gelten:

I. $\flat \varphi = d\varphi$, sobald φ ein Skalar ist.

II. $\flat \varphi^j = d\varphi^j + (i k, j) \varphi^i dx_k$.

III. $\flat(U^{\cdot\cdot} V^{\cdot\cdot}) = U^{\cdot\cdot} \flat V^{\cdot\cdot} + V^{\cdot\cdot} \flat U^{\cdot\cdot}$, wo $U^{\cdot\cdot}$ und $V^{\cdot\cdot}$ beliebige Tensoren sind.¹⁾

IV. $\flat(U^{\cdot\cdot} + V^{\cdot\cdot}) = \flat U^{\cdot\cdot} + \flat V^{\cdot\cdot}$, wo $U^{\cdot\cdot}$ und $V^{\cdot\cdot}$ gleichartige Tensoren sind.

1) III soll für jede Indizeskonstellation gelten, also auch dann, wenn einige der oberen Indizes gleich einigen unteren Indizes sind, und weiter auch dann, wenn über diese Indizes summiert wird (Verjüngung, vgl. S. 15 und 16).

Aus I bis III läßt sich das tensorielle Differential eines kovarianten Vektors berechnen. Sei μ_i ein bestimmter und λ^i ein beliebiger, längs der F_i definierter Vektor, so gilt, da $\lambda^i \mu_i$ ein Skalar ist, nach I

$$(1) \quad \delta(\lambda^i \mu_i) = d(\lambda^i \mu_i) = \mu_i d\lambda^i + \lambda^i d\mu_i.$$

Weiter gilt nach III

$$(2) \quad \delta(\lambda^i \mu_i) = \lambda^i \delta \mu_i + \mu_i \delta \lambda^i.$$

Aus (2) folgt, daß $\lambda^i \delta \mu_i$ eine Invariante, also $\delta \mu_i$ — da λ^i beliebig ist — ein kovarianter Vektor ist. Setzen wir den Ausdruck für $\delta \lambda^i$ nach II in (2) ein, so finden wir

$$(2') \quad \mu_i d\lambda^i + \lambda^i d\mu_i = \lambda^i \delta \mu_i + \mu_i (d\lambda^i + (p q, i) \lambda^p d x_q).$$

Somit gilt

$$(3) \quad [\delta \mu_p - d\mu_p + (p q, i) \mu_i d x_q] \lambda^p = 0$$

oder, da λ^p willkürlich ist,

$$(4) \quad \delta \mu_p = d\mu_p - (p q, i) \mu_i d x_q.$$

Das tensorielle Differential läßt, wie nochmals betont sei, den Tensorcharakter der Tensoren nullter und erster Stufe ungeändert. Man vergleiche (4) mit (1,18).

Wir denken uns jetzt in jedem Punkte der F_i den Tensor

$$(5) \quad x_i(\sigma \dots), T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s}(\sigma \dots)$$

gegeben, dessen Komponenten wir mittels der adjungierten n -Beine

$$(6) \quad x_i(\sigma \dots), {}_{(\alpha)}\tau_i(\sigma \dots); x_i(\sigma \dots), {}_{(\alpha)}\varrho^i(\sigma \dots)$$

in bekannter Art

$$(7) \quad T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} = (\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s) T_{(\alpha_1) \tau_{i_1} \dots (\alpha_r) \tau_{i_r}}^{(\beta_1) \varrho^{j_1} \dots (\beta_s) \varrho^{j_s}}$$

darstellen. Wenn es eine den Regeln I bis IV genügende tensorielle Differentiation überhaupt gibt, so erhalten wir $\delta T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s}$, wenn wir die rechte Seite nach den Regeln des gewöhnlichen Differentials (III und IV) behandeln. Da wir die Operation $\delta(\cdot)$, auf Tensoren bis zur ersten Stufe einschließlich ausgeübt, bereits kennen, erhalten wir auf der rechten Seite einen bekannten Ausdruck, und da der Tensorcharakter der Tensoren bis zur ersten Stufe einschließlich durch das tensorielle Differential nicht berührt wird, so gilt dies für den allgemeinen Tensor $T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s}$.

Wir gehen nun an die Berechnung des tensoriellen Differentials $\delta T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s}$ und erhalten bei Berücksichtigung der Regeln I bis IV und der daraus abgeleiteten Relation (4)

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} &= (\alpha_1) \tau_{i_1} \dots (\alpha_r) \tau_{i_r} (\beta_1) \varrho^{j_1} \dots (\beta_s) \varrho^{j_s} d_{(\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s)} T \\ &+ (\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s) T_{(\alpha_2) \tau_{i_2} \dots (\alpha_r) \tau_{i_r} (\beta_1) \varrho^{j_1} \dots (\beta_s) \varrho^{j_s}} [d_{(\alpha_1)} \tau_{i_1} - (i_1 q, p)_{(\alpha_1)} \tau_p d x_q] \\ &+ \dots \\ &+ (\alpha_1 \dots \alpha_r \beta_1 \dots \beta_s) T_{(\alpha_1) \tau_{i_1} \dots (\alpha_r) \tau_{i_r} (\beta_1) \varrho^{j_1} \dots (\beta_{s-1}) \varrho^{j_{s-1}}} [d_{(\beta_s)} \varrho^{j_s} + (p q, j_s)_{(\beta_s)} \varrho^p d x_q]. \end{aligned} \right.$$

Fassen wir zusammen, so lautet (8) wegen (7)

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{d} T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} &= d T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} \\ &- d x_a \{ (i_1 q, p) T_{i_1 p i_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} + (i_2 q, p) T_{i_1 p i_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} + \dots + (i_r q, p) T_{i_1 \dots i_{r-1} p}^{j_1 \dots j_s} \} \\ &+ d x_a \{ (p q, j_1) T_{i_1 \dots i_r}^{p j_2 \dots j_s} + (p q, j_2) T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 p j_3 \dots j_s} + \dots + (p q, j_s) T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1} p} \}. \end{aligned} \right.$$

Der Ausdruck $\mathfrak{d} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$, der nach (8) ein Tensor derselben Art wie $T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ ist, enthält die zu seiner Aufstellung verwendeten n -Beine (6) nicht mehr. Es bleibt nur mehr die Erledigung der Frage, ob dieses tensorielle Differential nun wirklich die Gesetze I bis IV erfüllt. Für die Gesetze I, II und IV gilt dies ohne weiteres (I ist nach Definition $\mathfrak{d}\varphi = d\varphi$ erfüllt). Was das Gesetz III betrifft, so sei

$$(10) \quad S_{k_1 \dots k_u}^{i_1 \dots i_p} = (\gamma_1 \dots \gamma_u \delta_1 \dots \delta_u) S_{(\gamma_1) \nu k_1 \dots (\gamma_u) \nu k_u} (\delta_1) \varrho^1 \dots (\delta_u) \varrho^u$$

die Beindarstellung eines zweiten, in den Punkten der F_l definierten, stetig differenzierbaren Tensors. Dann hat der Produkttensor

$$(11) \quad T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} S_{k_1 \dots k_u}^{i_1 \dots i_p}$$

als Beindarstellung (durch die n -Beine (6)) die Produkte der Beindarstellungen (7) und (10). Wir erhalten nun $\mathfrak{d}(T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} S_{k_1 \dots k_u}^{i_1 \dots i_p})$, wenn wir diese Beindarstellung nach den Regeln der üblichen Differentiation (III und IV) behandeln, wobei dann die einzelnen Summanden so geordnet werden können, daß

$$(12) \quad \mathfrak{d}(T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} S_{k_1 \dots k_u}^{i_1 \dots i_p}) = T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \mathfrak{d} S_{k_1 \dots k_u}^{i_1 \dots i_p} + S_{k_1 \dots k_u}^{i_1 \dots i_p} \mathfrak{d} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$$

wird. Die Relation (12) gilt für beliebige Indizeskonstellationen (vgl. die Fußnote S. 31), also ist beispielsweise auch

$$(12') \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{d}(T_{i_1 \dots i_h i_{h+1} \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} S_{k_1 \dots k_u}^{i_1 i_h i_{h+1} \dots i_p}) \\ &= T_{i_1 \dots i_h i_{h+1} \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \mathfrak{d} S_{k_1 \dots k_u}^{i_1 i_h i_{h+1} \dots i_p} + S_{k_1 \dots k_u}^{i_1 \dots i_h i_{h+1} \dots i_p} \mathfrak{d} T_{i_1 \dots i_h i_{h+1} \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \end{aligned} \right.$$

wo in (12) $i_\sigma = i_\sigma, \sigma = 1, \dots, h$ gesetzt wurde (Verjüngung).

Es gibt also eine den Gesetzen I bis IV genügende Operation, die tensorielle Differentiation, und zwar ist diese Operation durch die genannten Gesetze in der Form (9) eindeutig bestimmt.

Ist der Tensor $T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ in einem Gebiete des R_n definiert, die F_l also ein Raumstück des R_n ($l = n$), so gilt

$$(13) \quad d T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}}{\partial x_a} d x_a,$$

wo $x_i, d x_i$ ein beliebiger kontravarianter Vektor des R_n ist. Setzen wir (13) in (9) ein, so wird $\mathfrak{d} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ eine Linearform der Vektorkomponenten $d x_a$, die wir in der Form

$$(14) \quad \mathfrak{d} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \frac{\mathfrak{d} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}}{\mathfrak{d} x_a} d x_a$$

anschreiben. Das Koeffizientensystem der dx_q in (14)

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}}{\partial x_q} &= \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}}{\partial x_q} - (i_1 q, p) T_{p i_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} - \dots - (i_r q, p) T_{i_1 \dots i_{r-1} p}^{j_1 \dots j_s} \\ &+ (p q, j_1) T_{i_1 \dots i_r}^{p j_2 \dots j_s} + \dots + (p q, j_s) T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1} p} \end{aligned} \right.$$

ist dann das Komponentensystem eines s fach kontravarianten, $r + 1$ fach kovarianten Tensors $s + r + 1$ ter Stufe. Wir nennen den Tensor

$x_i, \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}}{\partial x_q}$ die tensorielle Ableitung des Tensors $x_i, T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$. Ist in einem m -System ein Tensor (d. h. seine Komponenten) r fach stetig differenzierbar ($r < m$), so ist seine tensorielle Ableitung $r - 1$ fach stetig differenzierbar.

Als wichtiges Beispiel für die tensorielle Ableitung behandeln wir die des kovarianten Tensors zweiter Stufe t_{ik} , der in einem Gebiete des R_n stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Wir haben nach (15)

$$(16) \quad \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_j} = \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_j} - (ij, \sigma) t_{\sigma k} - (kj, \sigma) t_{i\sigma}.$$

Nun bilden wir den Tensor

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial t_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_j} &= \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial t_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_j} - (ik, \sigma) t_{\sigma} - (jk, \sigma) t_{i\sigma} \\ &- (ji, \sigma) t_{\sigma k} - (li, \sigma) t_{j\sigma} + (lj, \sigma) t_{i\sigma} + (ij, \sigma) t_{\sigma k} \end{aligned} \right.$$

und spezialisieren das dem „Ableitungskalkül“ zugrunde liegende n -Bein (1, 4) in folgender Weise: Wir wählen im R_n n unabhängige, m fach stetig differenzierbare Skalare

$$(18) \quad {}_{(\alpha)}\Phi(x_1, \dots, x_n),$$

deren Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial({}_{(\alpha)}\Phi)}{\partial x_i} \right|$ in keinem Punkte des R_n verschwindet (z. B. die n Koordinaten in einem m -System). Das n -Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ bestimmen wir dann durch

$$(19) \quad {}_{(\alpha)}\mu_i = \frac{\partial({}_{(\alpha)}\Phi)}{\partial x_i}.$$

Nach (1, 13) gilt dann¹⁾

$$(20) \quad (ik, j) = (ki, j).$$

Schreiben wir die Tensorrelation (17) für das n -Bein (19) an, so gelten die Symmetriegesetze (20) und wir erhalten, wenn wir mit CHRISTOFFEL

$$(21) \quad \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial t_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_j} = 2 \left[\begin{matrix} ik \\ j \end{matrix} \right]$$

1) Gilt umgekehrt (20), also ${}_{(\alpha)}\lambda^j \left[\frac{\partial({}_{(\alpha)}\mu_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial({}_{(\alpha)}\mu_k)}{\partial x_i} \right] = 0$, so folgt aus $|{}_{(\alpha)}\lambda^j| \neq 0$, daß $\frac{\partial({}_{(\alpha)}\mu_i)}{\partial x_k} = \frac{\partial({}_{(\alpha)}\mu_k)}{\partial x_i}$ und somit ${}_{(\alpha)}\mu_k$ die Ableitung einer Funktion ${}_{(\alpha)}\Phi$ nach x_k ist.

schreiben und $2 T_{\sigma_j} = t_{\sigma_j} + t_{j\sigma}$ setzen, die Tensorrelation

$$(22) \quad \left[\begin{matrix} ik \\ j \end{matrix} \right] - (ik, \sigma) T_{\sigma_j} = \beta_{ikj},$$

wo β_{ikj} den Tensor auf der linken Seite von (17) bezeichnet (bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$). Die $\left[\begin{matrix} ik \\ j \end{matrix} \right]$ heißen *Christoffelklammern erster Art*. Wir setzen jetzt voraus, daß die Determinante des symmetrischen Tensors T_{σ_j}

$$(23) \quad |T_{\sigma_j}| \neq 0$$

ist. Dann existiert der zu T_{σ_j} adjungierte symmetrische kontravariante Tensor zweiter Stufe $T^{j\sigma}$, definiert durch die Tensorrelation

$$(24) \quad T_{\sigma_j} T^{j\sigma} = \delta_{\sigma}^{\sigma}.$$

Durch Überschiebung von (22) mit $T^{j\sigma}$ ergibt sich bei Einführung der *Christoffelklammern zweiter Art*

$$(25) \quad \left[\begin{matrix} ik \\ j \end{matrix} \right] T^{j\sigma} = \left\{ \begin{matrix} ik \\ \tau \end{matrix} \right\}$$

die fundamental wichtige Beziehung

$$(26) \quad \left\{ \begin{matrix} ik \\ \tau \end{matrix} \right\} - (ik, \tau) = \varepsilon_{ik}^{\tau},$$

wo $\varepsilon_{ik}^{\tau} = \beta_{ikj} T^{j\tau}$ ist.

Führt man $(ik, \tau) = \left\{ \begin{matrix} ik \\ \tau \end{matrix} \right\} - \varepsilon_{ik}^{\tau}$ in (9) bzw. (15) ein, so erhalten wir als Resultat, daß

$$(27) \quad \left\{ \begin{matrix} dT_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} - d x_{\alpha} \left[\left\{ \begin{matrix} i_1 \alpha \\ p \end{matrix} \right\} T_{p i_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} + \dots + \left\{ \begin{matrix} i_r \alpha \\ p \end{matrix} \right\} T_{i_1 \dots i_{r-1} p}^{j_1 \dots j_s} \right] \\ + d x_{\alpha} \left[\left\{ \begin{matrix} p \alpha \\ j_1 \end{matrix} \right\} T_{i_1 \dots i_r}^{p j_2 \dots j_s} + \dots + \left\{ \begin{matrix} p \alpha \\ j_s \end{matrix} \right\} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1} p} \right] \end{matrix} \right.$$

ein Tensor der gleichen Art wie $T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ ist, den wir *das absolute* oder *Ricci-differential* des Tensors $T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ nennen wollen, und daß

$$(28) \quad \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}}{\partial x_{\alpha}} - \left\{ \begin{matrix} i_1 \alpha \\ p \end{matrix} \right\} T_{p i_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \dots - \left\{ \begin{matrix} i_r \alpha \\ p \end{matrix} \right\} T_{i_1 \dots i_{r-1} p}^{j_1 \dots j_s} \\ + \left\{ \begin{matrix} p \alpha \\ j_1 \end{matrix} \right\} T_{i_1 \dots i_r}^{p j_2 \dots j_s} \dots + \left\{ \begin{matrix} p \alpha \\ j_s \end{matrix} \right\} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1} p} \end{matrix} \right.$$

ein Tensor ist, dessen (kovariante) Stufenzahl um eins größer ist als die von $T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$, dessen *kovariante, absolute* oder *Riccibleitung* wir ihn nennen wollen.

Auf diese Tensoren (Riccidifferential, Riccibleitung) wären wir auch gestoßen, wenn im Axiomensysteme I bis IV statt II: $\delta \rho^j = d \rho^j + \left\{ \begin{matrix} ik \\ j \end{matrix} \right\} \rho^i d x_k$ stünde.

Daraus folgt, daß auch für das Riccidifferential die Gesetze I bis IV richtig sind; in den Beweis, der für das „tensorielle Differential“ geführt wurde, ging ja die besondere Form der Klammern (ik, l) nicht ein.

III. Der n dimensionale Riemannsche Raum R_n .

§ I. Einführung.

Ein n dimensionaler Punktraum, wie wir ihn bisher betrachtet haben, heißt *Riemannscher Raum*, wenn in seinen Punkten ein *symmetrischer positiv definiten Tensor zweiter Stufe* $g_{ik}(x_1, \dots, x_n)$ definiert ist, der als *Maßtensor* des RIEMANNschen R_n bezeichnet wird. In den zugrunde gelegten m -Systemen (I, § 1) sei g_{ik} $m - 1$ fach stetig differenzierbar.

Nach I, § 8 hat g_{ik} in jedem Punkte des R_n die kanonische Darstellung

$$(1) \quad g_{ik} = {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\alpha)}\mu_k,$$

wo ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ein entsprechend gewähltes kovariantes n -Bein dieses Punktes ist.

Aus (1) folgt

$$(2) \quad g = |g_{ik}| = |{}_{(\alpha)}\mu_i|^2 > 0.$$

Den zu g_{ik} adjungierten kontravarianten symmetrischen Tensor zweiter Stufe g^{ik} nennen wir den *kontravarianten Maßtensor* des R_n . Wir notieren die g_{ik} mit g^{ik} verknüpfenden tensoriellen Relationen

$$(3) \quad g_{ik} g^{ij} = \delta_k^j.$$

Sind x_i, λ^i und x_i, λ_i durch die Tensorrelationen

$$(4) \quad \lambda_i = g_{ik} \lambda^k, \quad \lambda^j = g^{ij} \lambda_i$$

(die zweite folgt aus der ersten durch Überschiebung mit g^{ij} , die erste aus der zweiten durch Überschiebung mit g_{kj}) verbunden, so sprechen wir vom *Vektor* λ des Punktes $P(x_1, \dots, x_n)$, dessen kovariante Komponenten die λ_i und dessen kontravariante Komponenten die λ^i sind. Auch wenn man vom Vektor schlechtweg spricht, behalten die Operationen: Multiplikation mit einem Skalar und Addition ihren Sinn. Dasselbe gilt für die lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren. Gilt nämlich $\alpha \lambda_i + \beta \mu_i = 0$, so gilt ebenfalls $\alpha \lambda^i + \beta \mu^i = 0$ und umgekehrt.

Analog können wir mittels der Maßtensoren g_{ik} und g^{ik} einen Index einer Tensorkomponente T_{\cdot}^{\cdot} von oben nach unten bzw. von unten nach oben „ziehen“. Darunter versteht man die Überschiebung des Tensors T_{\cdot}^{\cdot} mit $g_{r\cdot}$ (bzw. T_{\cdot}^{\cdot} mit $g^{i\cdot}$), z. B.

$$(5) \quad T_{ij}^{\cdot k} = g_{ir} T_{\cdot j}^{\cdot k}.$$

Wegen dieser Operation ist jedem Index des Tensors $r + s$ ter Stufe $T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ eine der Ordnungszahlen $1, 2, \dots, r + s$ zuzuordnen, da ja (infolge der obigen Operation) jeder kovariante Index kontravariant gestellt werden kann und umgekehrt. Der Stellenzeiger ist im Beispiel (5) durch Punkte markiert, der Index i nimmt die erste, j die zweite und k die dritte Stelle ein.¹⁾

Die so aus einem gegebenen Tensor durch Indizesverschiebung gewonnenen Tensoren sollen stets durch gleiche Buchstaben (z. B. (5)) bezeichnet sein. Man spricht dann vom Tensor schlechtweg, dessen Komponentensystem also kovariant, kontravariant oder gemischt vorgegeben sein kann.²⁾ *Adjungiert* sind aber nur die Tensoren g^{ik} und g_{ik} , aber im allgemeinen nicht $t^{ik} = g'^p g^{kq} t_{pq}$ und t_{ik} , wo t_{ik} ein beliebiger Tensor zweiter Stufe ist, im Gegensatz zu der Bezeichnung in I, § 8 C.

Das in II definierte absolute Differential, mit dem Maßtensor g_{ik} gebildet, bezeichnen wir von nun an ausschließlich mit deutschem \mathfrak{d} . Es gilt also hier

$$(6) \quad \mathfrak{d}\lambda^i = d\lambda^i + \left\{ \begin{matrix} pq \\ i \end{matrix} \right\} \lambda^p d x_q$$

mit $\left\{ \begin{matrix} pq \\ i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} qp \\ i \end{matrix} \right\}$. Es gilt weiter die fundamentale Relation

$$(7) \quad \mathfrak{d}g_{ik} = 0, \quad \frac{\mathfrak{d}g_{ik}}{\mathfrak{d}x_j} = 0,$$

d. h. g_{ik} verhält sich in bezug auf die absolute Ableitung wie eine Konstante in bezug auf die gewöhnliche Ableitung. In der Tat gilt

$$(8) \quad \left\{ \begin{matrix} ij \\ r \end{matrix} \right\} = g^{ri} \left[\begin{matrix} ij \\ l \end{matrix} \right], \quad \left[\begin{matrix} ij \\ l \end{matrix} \right] = \left\{ \begin{matrix} ij \\ r \end{matrix} \right\} g_{rl}$$

(die zweite Relation folgt aus der ersten (II, 2, 25) durch Überschiebung mit g_{rl}). Somit wird

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{d}g_{ik}}{\mathfrak{d}x_j} &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \left\{ \begin{matrix} ij \\ l \end{matrix} \right\} g_{lk} - \left\{ \begin{matrix} kj \\ l \end{matrix} \right\} g_{il} - \left[\begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} kj \\ i \end{matrix} \right] \\ &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} \right) = 0, \end{aligned}$$

w. z. b. w. Für späteren Gebrauch notieren wir

$$(9) \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = \left[\begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} kj \\ i \end{matrix} \right].$$

1) Die Zuordnung der Stellenzahlen bei einem Tensor, z. B. $\frac{\mathfrak{d}\lambda^i}{\mathfrak{d}x_k} = \beta_{ik}^i$, ist ganz willkürlich. Wir können $\frac{\mathfrak{d}\lambda^i}{\mathfrak{d}x_k} = \beta_{ik}^i$ oder $\frac{\mathfrak{d}\lambda^i}{\mathfrak{d}x_k} = \beta_{k,i}^i$ schreiben. Ist die Zuordnung aber einmal gewählt, so muß sie beibehalten werden.

2) Aus (3) folgt damit, daß $\delta_k^i = g_k^i$ ist. Genauer folgt $\delta_k^i = g_k^i$ oder $= g_k^j$, aber wegen $g_{ik} = g_{ki}$ ist $g_k^i = g_k^j$.

Auch für den „gemischten Maßtensor“ $g_i^k = \delta_i^k$ gilt

$$(10) \quad \mathfrak{b}g_i^k = 0,$$

da

$$(11) \quad \frac{\mathfrak{b}\delta_i^k}{\mathfrak{b}x_j} = \frac{\partial\delta_i^k}{\partial x_j} - \left\{ \begin{matrix} ij \\ r \end{matrix} \right\} \delta_r^k + \left\{ \begin{matrix} rj \\ k \end{matrix} \right\} \delta_i^r = - \left\{ \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right\} = 0$$

ist. Aus (3) erhalten wir dann

$$(12) \quad g_{ik} \mathfrak{b}g^{ij} = 0$$

und daraus, da $|g_{ik}| > 0$ ist,

$$(13) \quad \mathfrak{b}g^{ij} = 0.$$

Aus (7) und (13) folgt

$$\mathfrak{b}(g_{ik} T^{\cdot}) = g_{ik} \mathfrak{b}T^{\cdot}, \quad \mathfrak{b}(g^{ik} T^{\cdot}) = g^{ik} \mathfrak{b}T^{\cdot}.$$

Betrachten wir das in die kanonische Darstellung (1) von g_{ik} eintretende n -Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$;

$$(14) \quad {}_{(\alpha)}\mu^i = g^{ik} {}_{(\alpha)}\mu_k$$

sind die kontravarianten Komponenten des Vektors ${}_{(\alpha)}\mu$, dessen kovariante Komponenten ${}_{(\alpha)}\mu_i$ sind. Durch Überschiebung von (14) mit ${}_{(\alpha)}\mu_l$ folgt nach (1)

$$(15) \quad {}_{(\alpha)}\mu^i {}_{(\alpha)}\mu_l = g^{ik} g_{kl} = \delta_l^i,$$

d. h. die ${}_{(\alpha)}\mu^i$ bilden das zu dem n -Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ adjungierte kontravariante n -Bein. Neben (15) gilt somit auch

$$(15') \quad {}_{(\alpha)}\mu^i {}_{(\beta)}\mu_i = \delta_{\alpha\beta}.$$

Durch Überschiebung mit ${}_{(\alpha)}\mu^j$ folgt aus (14)

$$(16) \quad g^{ij} = {}_{(\alpha)}\mu^i {}_{(\alpha)}\mu^j,$$

die kanonische Darstellung des kontravarianten Tensors g^{ij} . Die Relationen (15') sind äquivalent mit

$$(17) \quad g_{ik} {}_{(\alpha)}\mu^i {}_{(\beta)}\mu^k = g^{ik} {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\beta)}\mu_k = \delta_{\alpha\beta}.$$

Zum Schluß sei noch eine *Beindarstellung absoluter Differentiale* angegeben. Sei ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ein in allen Punkten des R_n definiertes, stetig differenzierbares n -Bein. Es gelte also für jeden Punkt des R_n

$$(18) \quad {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\beta)}\mu^i = \delta_{\alpha\beta}, \quad {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\alpha)}\mu^k = \delta_i^k.$$

Die kovarianten Ableitungen der ${}_{(\alpha)}\mu_i$ nach x_k lassen sich dann mittels geeigneter Skalare ${}_{(\alpha\beta\gamma)}\mu$ in dem n -Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ in der Form

$$(19) \quad \frac{\mathfrak{b}{}_{(\alpha)}\mu_i}{\mathfrak{b}x_k} = {}_{(\alpha\beta\gamma)}\mu {}_{(\beta)}\mu_i {}_{(\gamma)}\mu_k$$

darstellen. Setzen wir zur Abkürzung

$$(20) \quad {}_{(\alpha\beta\gamma)}\mu {}_{(\gamma)}\mu_k = {}_{(\alpha\beta)}C_k$$

so wird (19)

$$(21) \quad \frac{\mathfrak{d}({}_{(\alpha)}\mu_i)}{\mathfrak{d}x_k} = {}_{(\alpha\beta)}C_k({}_{(\beta)}\mu^i,$$

woraus durch Überschiebung mit g^{ij}

$$(21') \quad \frac{\mathfrak{d}({}_{(\alpha)}\mu^j)}{\mathfrak{d}x_k} = {}_{(\alpha\beta)}C_k({}_{(\beta)}\mu^j$$

folgt. Aus den ersten Gleichungen (18) ergibt sich durch kovariante Differentiation nach x_k wegen (18), (21) und (21')

$$(22) \quad {}_{(\alpha\beta)}C_i = -{}_{(\beta\alpha)}C_i.$$

Ist λ_i ein stetig differenzierbarer Vektor, so folgt aus seiner Beindarstellung

$$(23) \quad \lambda_i = {}_{(\alpha)}\lambda({}_{(\alpha)}\mu_i$$

durch absolute Differentiation

$$(24) \quad \mathfrak{d}\lambda_i = (\mathfrak{d}({}_{(\alpha)}\lambda + {}_{(\beta)}\lambda({}_{(\beta\alpha)}C_k \mathfrak{d}x_k))({}_{(\alpha)}\mu_i.$$

In analoger Weise läßt sich das absolute Differential eines beliebigen Tensors durch die ${}_{(\alpha\beta)}C_k$ und ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ausdrücken; insbesondere gilt für einen kontravarianten Vektor λ^i

$$(25) \quad \mathfrak{d}\lambda^i = (\mathfrak{d}({}_{(\alpha)}\lambda + {}_{(\beta)}\lambda({}_{(\beta\alpha)}C_k \mathfrak{d}x_k))({}_{(\alpha)}\mu^i.$$

Man beachte, daß der Klammerausdruck derselbe ist wie in (24).

§ 2. Das Messen.

Es sei im Punkte P des R_n der Vektor λ mit den kontravarianten Komponenten λ^i und den kovarianten Komponenten λ_i gegeben. Unter der *Länge* λ (dem Maß) des Vektors λ versteht man die positive Wurzel der Invariante

$$(1) \quad g_{ik}\lambda^i\lambda^k = \lambda_k\lambda^k = g^{ik}\lambda_i\lambda_k,$$

also

$$(1') \quad \lambda = \sqrt{g_{ik}\lambda^i\lambda^k}.$$

Die Länge λ ist eine reelle positive Zahl, die nur für den Nullvektor ($\lambda^i = 0$) verschwindet. Vektoren der Länge eins heißen *normiert*, *Einheitsvektoren* oder *Richtungen*.

Sind jetzt λ und μ zwei Vektoren im Punkte P , so ist die Invariante

$$(2) \quad \frac{g_{ik}\lambda^i\mu^k}{\sqrt{g_{ik}\lambda^i\lambda^k}\sqrt{g_{ik}\mu^i\mu^k}} \leq 1.$$

Der Wert eins wird dann und nur dann angenommen, wenn λ und μ linear abhängig sind; ist nämlich $\alpha\lambda^i + \beta\mu^i = 0$ oder $\lambda^i = \rho\mu^i$, so wird der Wert von (2) gleich eins, wie behauptet. Wir setzen voraus, daß die Vektoren λ und μ *linear unabhängig* sind und bilden

$$(3) \quad g_{ik}(\alpha\lambda^i + \beta\mu^i)(\alpha\lambda^k + \beta\mu^k)$$

mit von Null verschiedenen Skalaren α und β . Der Wert der Invariante (3), das Quadrat der Länge des Vektors $\alpha\lambda + \beta\mu$ ist stets größer als Null und wird für keine Wahl von α und β Null, da sonst (für diese Werte von α und β) $\alpha\lambda + \beta\mu = 0$ wäre gegen Voraussetzung. Die in $\alpha : \beta$ quadratische Gleichung

$$(4) \quad \alpha^2 (g_{ik} \lambda^i \lambda^k) + 2\alpha\beta (g_{ik} \lambda^i \mu^k) + \beta^2 (g_{ik} \mu^i \mu^k) = 0$$

hat demnach keine reelle Wurzel; ihre Diskriminante

$$(5) \quad (g_{ik} \lambda^i \lambda^k) (g_{ik} \mu^i \mu^k) - (g_{ik} \lambda^i \mu^k)^2$$

muß daher positiv, also der Wert von (2) kleiner als eins sein.

Setzen wir demnach

$$(6) \quad \cos \sphericalangle \lambda \mu = \frac{g_{ik} \lambda^i \mu^k}{\sqrt{g_{ik} \lambda^i \lambda^k} \sqrt{g_{ik} \mu^i \mu^k}},$$

so ist dadurch bis auf Vielfache von 2π und bis auf das Vorzeichen der reelle (mit $\sphericalangle \lambda \mu$ bezeichnete) Winkel der Vektoren λ und μ definiert.

Der Winkel $\sphericalangle \lambda \mu$ hängt nur von den Richtungen der Vektoren λ und μ ab.¹⁾ Die Vektoren $\varrho\lambda$, $\sigma\mu$ (ϱ , σ positive Skalare) definieren den gleichen Winkel wie die Vektoren λ und μ . Ist $\sphericalangle \lambda \mu = 0$, also $\cos \sphericalangle \lambda \mu = 1$, so bedeutet das nach obigem *lineare Abhängigkeit der Vektoren λ^i und μ^i* ; auch umgekehrt folgt aus $\lambda^i = \varrho\mu^i$, daß $\cos \sphericalangle \lambda \mu = 1$, d. h. $\sphericalangle \lambda \mu = 0$ ist.

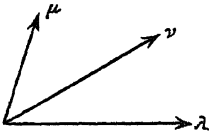


Fig. 1.

Nun wird man aber von einer brauchbaren Winkeldefinition die Gültigkeit des Additionstheorems verlangen: Sind λ , μ und ν drei Vektoren des zweidimensionalen Vektorraumes $\{\lambda, \mu\}$ in P (Fig. 1), so muß bei geeigneter Wahl des Vorzeichens der auftretenden Winkel

$$(7) \quad \sphericalangle \lambda \mu + \sphericalangle \mu \nu = \sphericalangle \lambda \nu$$

sein. Diese Forderung läßt sich erfüllen, wenn man nur in geeigneter Weise einen Richtungssinn im Vektorraume $\{\lambda, \mu\}$ festlegt. Dieser Vektorraum

$$(8) \quad \nu^i = \alpha\lambda^i + \beta\mu^i, \quad (\alpha, \beta \text{ beliebige Skalare})$$

schneidet den isotropen Kegel (Kegel der isotropen Vektoren) $g_{ik} \nu^i \nu^k = 0$ in zwei (natürlich imaginären) Vektoren $'I$ und $''I$, deren Darstellungszahlen α und β der quadratischen Gleichung

$$(9) \quad \Phi = \alpha^2 (\lambda\lambda) + 2\alpha\beta (\lambda\mu) + \beta^2 (\mu\mu) = 0$$

genügen, wobei zur Abkürzung

$$(10) \quad (\lambda\mu) = \lambda_i \mu^i = g_{ik} \lambda^i \mu^k$$

gesetzt ist. Sind $\alpha_1 : \beta_1$ und $\alpha_2 : \beta_2$ die beiden Wurzeln von (9), so ist

$$(11) \quad 'I^i = \alpha_1 \lambda^i + \beta_1 \mu^i, \quad ''I^i = \alpha_2 \lambda^i + \beta_2 \mu^i,$$

1) Dabei ist unter der Richtung des Vektors λ^i der Einheitsvektor $\frac{\lambda^i}{\sqrt{\lambda_i \lambda^i}}$ verstanden.

und für Φ gilt

$$(12) \quad \Phi = p(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)(\alpha\beta_2 - \beta\alpha_2),$$

was mit (9) verglichen

$$(13) \quad (\lambda\lambda) = p\beta_1\beta_2, \quad (\lambda\mu) = -\frac{p}{2}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1), \quad (\mu\mu) = p\alpha_1\alpha_2$$

gibt. Wir können demnach $\cos^2 \sphericalangle \lambda\mu$ nach (6) in der Form schreiben

$$(14) \quad \cos^2 \sphericalangle \lambda\mu = \frac{1}{4} \frac{\alpha_1^2 \beta_2^2 + 2\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1 + \alpha_2^2 \beta_1^2}{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} : \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} : \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) + \frac{1}{2}.$$

Setzen wir $\sphericalangle \lambda\mu = \varphi$, so gilt aber auch

$$(15) \quad \cos^2 \varphi = \frac{(e^{\varphi} + e^{-\varphi})^2}{4} = \frac{1}{4} [e^{2\varphi} + e^{-2\varphi}] + \frac{1}{2},$$

also, wenn wir $\frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}{\frac{\alpha_2}{\beta_2}} = w$ setzen,

$$(16) \quad e^{2\varphi} + e^{-2\varphi} = w + w^{-1}.$$

Durch Multiplikation mit $e^{2\varphi}$ ergibt sich eine quadratische Gleichung für $e^{2\varphi}$, deren Wurzeln

$$(17) \quad e^{2\varphi} = w, \quad e^{-2\varphi} = w^{-1}$$

man aus (16) abliest. Wir erhalten somit $2i\varphi = \pm \ln w$, also

$$(18) \quad \varphi = \pm \frac{i}{2} \ln \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} : \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right).$$

Wir müssen nun, um weiter diskutieren zu können, einige elementare Tatsachen der projektiven Geometrie in Erinnerung bringen. Ist $\{\rho^i, \sigma^i\}$ ein zweidimensionaler Vektorraum in einem Punkt P , so hat jeder Vektor τ^i dieses $V^{(2)}$ seine Darstellung

$$(19) \quad \tau^i = A\rho^i + B\sigma^i.$$

A, B heißen seine Darstellungszahlen, die wir, sofern uns bloß die Richtung von τ^i interessiert, als homogene Koordinaten von τ^i ansehen. Sind

$$(20) \quad ({}_{(\alpha)}\rho^i = ({}_{(\alpha)}A\rho^i + ({}_{(\alpha)}B\sigma^i, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

vier Richtungen des Vektorraumes $\{\rho, \sigma\}$, so definiert man als Doppelverhältnis dieser vier Richtungen die Invariante

$$(21) \quad ({}_{(1)}\rho \ {}_{(2)}\rho \ {}_{(3)}\rho \ {}_{(4)}\rho) = \frac{({}_{(1)}\rho - ({}_{(1)}\rho) : ({}_{(1)}\rho - ({}_{(4)}\rho))}{({}_{(1)}\rho - ({}_{(3)}\rho) : ({}_{(1)}\rho - ({}_{(4)}\rho))},$$

wobei

$$({}_{(\alpha)}\rho - ({}_{(\beta)}\rho) = ({}_{(\alpha)}A - ({}_{(\beta)}A)\rho + ({}_{(\alpha)}B - ({}_{(\beta)}B)\sigma$$

ist. Ausführlich gilt daher

$$(21') \quad ({}_{(1)}\rho \ {}_{(2)}\rho \ {}_{(3)}\rho \ {}_{(4)}\rho) = \frac{({}_{(1)}A - ({}_{(3)}A)({}_{(2)}B - ({}_{(4)}A - ({}_{(1)}A)B)}{({}_{(1)}A - ({}_{(4)}A)B - ({}_{(2)}A - ({}_{(3)}A)B) \frac{({}_{(2)}B - ({}_{(4)}A - ({}_{(1)}A)B)}{({}_{(3)}A - ({}_{(4)}A)B - ({}_{(1)}A - ({}_{(2)}A)B)}.$$

Neben anderen ähnlichen Relationen gilt nach (21')

$$(22) \quad (1)P (2)P (3)P (4)P = \frac{1}{(3)P (1)P (4)P}, \quad (1)P (2)P (3)P (4)P = (3)P (4)P (1)P (2)P.$$

Das Doppelverhältnis ist in den Darstellungszahlen eines jeden der vier Vektoren (20) homogen von nullter Ordnung, also wieder nur von den Richtungen dieser Vektoren abhängig. Hätte man statt ϱ^i, σ^i ein anderes den $V^{(2)}\{\varrho^i, \sigma^i\}$ aufspannendes Zweibein verwendet, so würde daraus die Transformation

$$(23) \quad A = \alpha \bar{A} + \beta \bar{B}, \quad B = \gamma \bar{A} + \delta \bar{B} \quad \text{mit} \quad \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right| \neq 0$$

der Darstellungszahlen A, B des Vektors τ^i (19) folgen. Das Doppelverhältnis (21') bleibt dabei invariant, es ist also nur abhängig von den vier Vektoren (20) und nicht von der Wahl des den $V^{(2)}\{\varrho^i, \sigma^i\}$ aufspannenden Zweibeins.

Nach dieser Erinnerung gehen wir zu unserer Formel (18) zurück. Wir berechnen das Doppelverhältnis ($'\Gamma''\Gamma\lambda\mu$) der vier Vektoren $'\Gamma, ''\Gamma, \lambda$ und μ , wobei λ und μ als Darstellungszweibein verwendet werde. Die Darstellungszahlen A und B entnehmen wir dem Schema

	$'\Gamma$	$''\Gamma$	λ	μ
A	α_1	α_2	1	0
B	β_1	β_2	0	1

Aus (21') folgt

$$(23') \quad (''\Gamma''\Gamma\lambda\mu) = \frac{-\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_2}{-\beta_2} = \frac{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} = w^{-1},$$

und somit erhalten wir statt (18)

$$(24) \quad \sphericalangle \lambda\mu = \varphi = \pm \frac{i}{2} \ln (''\Gamma''\Gamma\lambda\mu).$$

Kommen wir nun überein, welchen der beiden isotropen Vektoren Γ wir (als ersten) mit $'\Gamma$ bezeichnen, so ist durch

$$(25) \quad \sphericalangle \lambda\mu = + \frac{i}{2} \ln (''\Gamma''\Gamma\lambda\mu)$$

über den Richtungssinn des Winkels entschieden. Der Richtungssinn wird bei Vertauschung der beiden isotropen Vektoren $'\Gamma, ''\Gamma$ nach (22) umgekehrt. Ferner gilt $\sphericalangle \lambda\mu = -\sphericalangle \mu\lambda$. Aus

$$(26) \quad (''\Gamma''\Gamma\lambda\mu) (''\Gamma''\Gamma\mu\nu) = (''\Gamma''\Gamma\lambda\nu)$$

folgt aber nach (25)

$$(27) \quad \sphericalangle \lambda\mu + \sphericalangle \mu\nu = \sphericalangle \lambda\nu + \varepsilon\pi,$$

wo ε entweder 0, -1 oder $+1$ bedeutet. Denn in (25) ist ja $\sphericalangle \lambda\mu$ nur bis

auf $\pm \pi$ und Vielfache von 2π bestimmt ($\ln z = \ln |z| + i\varphi$). Da $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos \alpha$ ist, so legen (6) und (25) erst gemeinsam den Winkel $\sphericalangle \lambda \mu$ fest.¹⁾

Da die beiden Winkeldefinitionen den Winkel als stetige Funktion der Richtungskomponenten geben, so kann in (27) kein Sprung für ε eintreten, d. h. ε muß immer entweder 0 oder -1 oder $+1$ sein. Für $\lambda = \mu$ ist aber $\varepsilon = 0$, also muß ε immer Null sein. Es gilt somit in der Tat das Gesetz (7).

Für $\sphericalangle \lambda \mu = \pm \frac{\pi}{2}$ folgt aus (25)

$$(28) \quad ({}'T''T\lambda\mu) = -1,$$

und umgekehrt ist, falls (28) gilt, $\sphericalangle \lambda \mu = \pm \frac{\pi}{2}$. Normale Vektoren bilden mit den beiden isotropen Vektoren $'T$ und $''T$ demnach das Doppelverhältnis -1 , oder: λ^i und μ^i stehen dann und nur dann normal, wenn jeder dieser Vektoren im Polarvektorraum $V^{(n-1)}$ des anderen in bezug auf den isotropen Kegel liegt. Letzteres Resultat folgt auch direkt aus $g_{ik}\lambda^i\mu^k = 0$.

Aus der Formel (6) gewinnen wir

$$(29) \quad \sin^2 \sphericalangle \lambda \mu = \frac{(g_{ik}\lambda^i\lambda^k)(g_{pq}\mu^p\mu^q) - (g_{iq}\lambda^i\mu^q)(g_{pk}\mu^p\lambda^k)}{(g_{ik}\lambda^i\lambda^k)(g_{pq}\mu^p\mu^q)}$$

oder

$$(30) \quad \sin^2 \sphericalangle \lambda \mu \cdot (g_{ik}\lambda^i\lambda^k)(g_{pq}\mu^p\mu^q) = (g_{ik}g_{pq} - g_{iq}g_{pk})(\lambda^i\mu^p - \lambda^p\mu^i)(\lambda^k\mu^q - \lambda^q\mu^k),$$

wo rechts über alle Kombinationen (i, p) , (k, q) zu summieren ist.

Wir definieren: r Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda$ ($\alpha = 1, \dots, r$) eines Punktes P bilden ein normiertes r -Bein in P , wenn sie den Tensorrelationen

$$(31) \quad {}_{(\alpha)}\lambda_{(i)}\lambda^i = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, r)$$

genügen. Wir können von einem r -Bein sprechen, da r solche Vektoren linear unabhängig sind. Denn aus ${}_{(\alpha)}\lambda_{(\alpha)}\lambda_{\alpha} = 0$ ($\alpha = 1, \dots, r$) folgt durch Überschließung mit ${}_{(\beta)}\lambda^i$ wegen (31) sofort ${}_{(\beta)}\lambda_{\alpha} = 0$ für $\beta = 1, \dots, r$.

Wegen (1, 17) ist das in eine kanonische Darstellung (1, 1) von g_{ik} eintretende n -Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ein normiertes n -Bein.

1) Denn nur für einen der beiden Winkel $\sphericalangle \lambda \mu$ und $\sphericalangle \lambda \mu + \pi$ ergibt $\cos \sphericalangle \lambda \mu$ wegen $\cos(\sphericalangle \lambda \mu + \pi) = -\cos \sphericalangle \lambda \mu$ das durch (6) bestimmte Vorzeichen. Dadurch, daß man $\frac{i}{2} \ln ({}'T''T\lambda\mu) = \sphericalangle \lambda \mu$ und $\frac{i}{2} \ln ({}'T''T\mu\nu) = \sphericalangle \mu\nu$ setzt, entscheidet man sich für einen der beiden (mod 2π) möglichen Werte jeder dieser beiden Größen. Damit ist in (27) über den Wert von $\frac{i}{2} \ln ({}'T''T\lambda\nu)$ bereits mitentschieden und es ist keineswegs von vornherein feststehend, daß dieser Wert von $\frac{i}{2} \ln ({}'T''T\lambda\nu)$ ebenfalls gleich $\sphericalangle \lambda\nu$ selbst ist.

Ist umgekehrt ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ($\alpha = 1, \dots, n$) ein normiertes n -Bein in P , gilt also (31) für $r = n$ (und damit ${}_{(\alpha)}\lambda_i {}_{(\alpha)}\lambda^k = \delta_k^i$), so ist ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ das zu ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ adjungierte kontravariante n -Bein. Aus $g_{i,k} = {}_{(\alpha\beta)}g {}_{(\alpha)}\lambda_i {}_{(\beta)}\lambda_k$ und ${}_{(\alpha\beta)}g = g_{i,k} {}_{(\alpha)}\lambda^i {}_{(\beta)}\lambda^k = \delta_{\alpha\beta}$ folgt dann

$$(32) \quad g_{i,k} = {}_{(\alpha)}\lambda_i {}_{(\alpha)}\lambda_k$$

als Darstellung des Maßtensors durch das normierte n -Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$.

Das Problem der kanonischen Darstellung des Maßtensors $g_{i,k}$ ist demnach identisch mit der Konstruktion normierter n -Beine. Wir behandeln zunächst die Konstruktion eines einen r -dimensionalen Vektorraum $V^{(r)}$ aufspannenden normierten r -Beins.

Sei $V^{(r)}$ ein r -dimensionaler Vektorraum in P . Aus ihm heben wir einen Vektor λ beliebig heraus und normieren ihn. Einen Vektor λ normieren heißt, den Vektor λ^i durch seine Richtung $\frac{\lambda^i}{\sqrt{g_{i,k} \lambda^i \lambda^k}}$ ersetzen. Das ist stets ausführbar, wenn λ^i kein Nullvektor ist. Der so gewonnene Einheitsvektor sei mit ${}_{(1)}\lambda^i$ bezeichnet. Ist $r = 1$, dann sind wir fertig, ist $r > 1$, so gibt es im $V^{(r)}$ sicher einen nicht im $V^{(1)} \equiv \{{}_{(1)}\lambda^i\}$ liegenden Vektor μ . Im Vektorraume $V^{(2)} \equiv \{{}_{(1)}\lambda, \mu\}$ gibt es einen auf ${}_{(1)}\lambda$ normal stehenden Vektor. In der Tat ist $\sigma {}_{(1)}\lambda + \mu$ dieser Vektor, sobald $\sigma {}_{(1)}\lambda_i {}_{(1)}\lambda^i + \mu_i {}_{(1)}\lambda^i = 0$ ist, also $\sigma = -\mu_i {}_{(1)}\lambda^i$ gesetzt wird. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren ${}_{(1)}\lambda$ und μ ist dieser Vektor kein Nullvektor, wir können ihn also normieren und erhalten den Einheitsvektor ${}_{(2)}\lambda_i$, der auf ${}_{(1)}\lambda_i$ normal steht.

Ist $r = 2$, dann sind wir am Ziele, ist $r > 2$, so gibt es einen Vektor ν des $V^{(r)}$, der nicht im $V^{(2)} \equiv \{{}_{(1)}\lambda, {}_{(2)}\lambda\}$ liegt. Im $V^{(3)} \equiv \{{}_{(1)}\lambda, {}_{(2)}\lambda, \nu\}$ gibt es einen Vektor, der auf ${}_{(1)}\lambda$ und ${}_{(2)}\lambda$ normal steht; und zwar ist $\sigma {}_{(1)}\lambda + \tau {}_{(2)}\lambda + \nu$ dieser Vektor, sobald man σ und τ aus $0 = (\sigma {}_{(1)}\lambda_i + \tau {}_{(2)}\lambda_i + \nu_i) {}_{(1)}\lambda^i$, $0 = (\sigma {}_{(1)}\lambda_i + \tau {}_{(2)}\lambda_i + \nu_i) {}_{(2)}\lambda^i$ bestimmt, also $\sigma = -\nu_i {}_{(1)}\lambda^i$ und $\tau = -\nu_i {}_{(2)}\lambda^i$ setzt. Dieser Vektor, der kein Nullvektor ist, gibt uns nach Normierung den dritten Einheitsvektor ${}_{(3)}\lambda_i$, usw. Auf diesem Wege gelangt man zur Konstruktion eines normierten r -Beins ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ($\alpha = 1, \dots, r$), das den gegebenen $V^{(r)}$ aufspannt.

Man kann, indem man dieselbe Konstruktion für den Normalvektorraum $V^{(n-r)}$ des $V^{(r)}$ ausführt, das r -Bein zu einem normierten n -Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ($\alpha = 1, \dots, n$) ergänzen.

Ist ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) irgendein normiertes, den $V^{(r)}$ aufspannendes r -Bein in P , so wird jeder der drei Tensoren zweiter Stufe

$$(33) \quad \begin{cases} p_{i,k} = {}_{(\alpha)}\lambda_i {}_{(\alpha)}\lambda_k \\ p^i_k = {}_{(\alpha)}\lambda^i {}_{(\alpha)}\lambda_k (= p_k^i = {}_{(\alpha)}\lambda_k {}_{(\alpha)}\lambda^i) \\ p^{i,k} = {}_{(\alpha)}\lambda^i {}_{(\alpha)}\lambda^k \end{cases} \quad (\alpha = 1, \dots, r)$$

Projektionstensor des $V^{(r)}$ genannt. Wir zeigen zunächst, daß der Projektions-

tensor von dem den $V^{(r)}$ aufspannenden speziellen normierten r -Bein nicht abhängt. Ist ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) ein zweites, den $V^{(r)}$ aufspannendes normiertes r -Bein, dann gelten die Darstellungen

$$(34) \quad {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i = {}_{(\alpha\beta)}C_{(\beta)}\lambda_i, \quad {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i = {}_{(\alpha\beta)}C_{(\beta)}\lambda^i \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, r);$$

aus ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i {}_{(\beta)}\bar{\lambda}^i = \delta_{\alpha\beta} = {}_{(\alpha\gamma)}C_{(\beta\epsilon)}C_{(\gamma)}\lambda_i {}_{(\epsilon)}\lambda^i = {}_{(\alpha\gamma)}C_{(\beta\epsilon)}C_{(\gamma\epsilon)}\delta_{\gamma\epsilon} = {}_{(\alpha\gamma)}C_{(\beta\gamma)}C_{(\gamma)}\lambda_i {}_{(\epsilon)}\lambda^i$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, r$) erkennt man, daß die Darstellungsmatrix $\| {}_{(\alpha\beta)}C \|$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, r$) orthogonal ist. Bilden wir nun den Projektionstensor mit dem normierten r -Bein ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i$, so erhalten wir

$$(35) \quad \bar{p}_{ik} = {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^k = {}_{(\alpha\beta)}C_{(\alpha\gamma)}C_{(\beta)}\lambda_i {}_{(\gamma)}\lambda^k = {}_{(\beta)}\lambda_i {}_{(\beta\gamma)}\lambda^k = p_{ik},$$

w. z. b. w.

Es bleibt jetzt noch die Rechtfertigung des Namens *Projektionstensor*. Wir definieren: Der Vektor λ_i eines Vektorraumes $V^{(r)}$ heißt *Projektionsvektor* oder kurz *Projektion des Vektors λ_i (desselben Punktes) in den Vektorraum $V^{(r)}$* , wenn der Differenzvektor $\lambda_i - \underline{\lambda}_i$ auf dem Vektorraume $V^{(r)}$ normal steht. Es gilt also

$$(36) \quad \lambda_i = \underline{\lambda}_i + l_i,$$

wo $\xi^i l_i = 0$ ist für jeden Vektor ξ^i des $V^{(r)}$. Durch diese Definition wird die Projektion eindeutig bestimmt. Wenn nämlich neben (36) noch eine zweite solche Zerlegung

$$\lambda_i = \bar{\lambda}_i + \bar{l}_i$$

des Vektors λ_i existierte, so wäre

$$(36') \quad \underline{\lambda}_i - \bar{\lambda}_i = \bar{l}_i - l_i.$$

Überschieben wir (36') mit $\underline{\lambda}^i - \bar{\lambda}^i$, so erhalten wir

$$(36'') \quad (\underline{\lambda}_i - \bar{\lambda}_i)(\underline{\lambda}^i - \bar{\lambda}^i) = g_{ik}(\underline{\lambda}^i - \bar{\lambda}^i)(\underline{\lambda}^k - \bar{\lambda}^k) = 0,$$

also, da g_{ik} positiv definit ist, $\underline{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i$, w. z. b. w.

Aus der Definition folgt: Die Summe der Projektionen zweier Vektoren in einen Vektorraum $V^{(r)}$ ist gleich der Projektion des Summenvektors dieser zwei Vektoren. Wesentlich für die Definition des Projektionsvektors ist der positiv definite Charakter des Maßtensors g_{ik} , der ja in den eben gegebenen Beweis ausdrücklich eintritt. Gäbe es einen reellen Vektor $\xi^i \neq 0$ mit $g_{ik}\xi^i\xi^k = 0$, so gälte die Zerlegung

$$\xi^i = \alpha \xi^i + (1 - \alpha) \xi^i,$$

wo $\alpha \xi^i$ ein Vektor des $V^{(r)} = \{ \xi^i \}$ und $(1 - \alpha) \xi^i$ dem Normalraum von ξ^i angehörte. Dabei ist α willkürlich, daher der Projektionsvektor unbestimmt. Aus (36'') folgt eben, daß die Projektion nur bis auf einen isotropen Vektor (§ 2) bestimmt ist; ein solcher ist aber für positiv definite g_{ik} nicht reell.

Ist nun p_{ik} (33) der Projektionstensor des Vektorraumes $V^{(r)}$ in P und λ^i ein beliebiger Vektor in diesem Punkte P , so ist

$$(37) \quad \underline{\lambda}_i = p_{ik} \lambda^k$$

der Projektionsvektor von λ^i . Um dies nachzuweisen, ist zu zeigen, daß $\underline{\lambda}_i$ ein Vektor des $V^{(r)}$ und $\lambda_i - \underline{\lambda}_i$ ein Normalvektor des $V^{(r)}$ ist. Denken wir uns das den $V^{(r)}$ aufspannende normierte Bein zu einem normierten n -Bein ergänzt, so gilt die Darstellung

$$(38) \quad \lambda_i = {}_{(\alpha)}\lambda^k {}_{(\alpha)}\lambda_k, \quad {}_{(r)}\lambda^i = \lambda_k {}_{(\alpha)}\lambda^{ik} = {}_{(\alpha)}\lambda_k \lambda^k.$$

Somit ist

$$(38') \quad \lambda_i = \sum_{\alpha=1}^n {}_{(\alpha)}\lambda_i {}_{(\alpha)}\lambda_k \lambda^k = p_{ik} \lambda^k + \sum_{\alpha=r+1}^n ({}_{(\alpha)}\lambda_k \lambda^k) {}_{(\alpha)}\lambda_i$$

und unsere Behauptung ist bewiesen.¹⁾

Neben dem Projektionstensor spielt *der normierte Plücker'sche Tensor des Vektorraumes $V^{(r)}$* in P eine Rolle.

Ist wieder ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) ein normiertes, den $V^{(r)}$ aufspannendes r -Bein, so nennen wir

$$(39) \quad \pi^{i_1 i_2 \dots i_r} = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda^{i_1} & {}_{(1)}\lambda^{i_2} & \dots & {}_{(1)}\lambda^{i_r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ {}_{(r)}\lambda^{i_1} & {}_{(r)}\lambda^{i_2} & \dots & {}_{(r)}\lambda^{i_r} \end{vmatrix}$$

den (jetzt bis auf das Vorzeichen bestimmten) *normierten Plücker'schen Tensor des $V^{(r)}$* . Es seien weiter ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ($\alpha = 1, \dots, t$; $t \leq r$) t Vektoren desselben Punktes P ; wir betrachten in P das Tensorprodukt

$$(40) \quad \pi^{i_1 i_2 \dots i_r} {}_{(1)}\mu_{i_1} {}_{(2)}\mu_{i_2} \dots {}_{(t)}\mu_{i_t} = \bar{\pi}^{i_1+1 i_2+2 \dots i_r}.$$

Dieses Tensorprodukt kann auch

$$(41) \quad \sum_{(i_1 i_2 \dots i_t)} \pi^{i_1 i_2 \dots i_r} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\mu_{i_1} & {}_{(1)}\mu_{i_2} & \dots & {}_{(1)}\mu_{i_t} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ {}_{(t)}\mu_{i_1} & {}_{(t)}\mu_{i_2} & \dots & {}_{(t)}\mu_{i_t} \end{vmatrix}$$

geschrieben werden, wo über alle Kombinationen ($i_1 i_2 \dots i_t$) — jede einmal gezählt — zu summieren ist. Der Tensor $\bar{\pi}^{i_1+1 \dots i_r}$ verschwindet, sobald zwischen den Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ eine lineare Relation besteht; bezeichnen wir mit ${}_{(\alpha)}\mu_i$ die Projektion des Vektors ${}_{(\alpha)}\mu_i$ in den $V^{(r)}$, so gilt ebenfalls

$$(42) \quad \bar{\pi}^{i_1+1 \dots i_r} = \pi^{i_1 i_2 \dots i_t} {}_{(1)}\mu_{i_1} {}_{(2)}\mu_{i_2} \dots {}_{(t)}\mu_{i_t},$$

da ja ${}_{(\alpha)}\lambda^{i_1} {}_{(\beta)}\mu_{i_1} = {}_{(\alpha)}\lambda^{i_1} {}_{(\beta)}\mu_{i_1}$ ist.

1) Aus (38') folgt ebenfalls die Unabhängigkeit des Projektionstensors von der Wahl des normierten r -Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$.

Der Tensor (42) ist also nur dann Null, wenn zwischen den Projektionsvektoren ${}_{(\alpha)}\underline{\mu}_i$ ($\alpha = 1, \dots, t$) lineare Abhängigkeit besteht. Wir wollen diesen trivialen Fall beiseite lassen und voraussetzen, daß die Vektoren ${}_{(\alpha)}\underline{\mu}_i$ linear unabhängig sind. Sie spannen dann einen t dimensionalen Vektorraum $V^{(t)}$ auf, der ganz im $V^{(r)}$ gelegen ist. Das den $V^{(r)}$ aufspannende normierte r -Bein ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ wählen wir nun so, daß die ersten t Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, t$) den $V^{(t)}$ aufspannen, woraus dann

$$(43) \quad {}_{(\alpha)}\underline{\mu}_i \cdot {}_{(\beta)}\lambda^i = 0$$

für $\beta > t$ folgt. Aus (39) und (42) erhalten wir

$$(44) \quad \bar{\pi}^{\hat{i}_1 \hat{i}_2 \dots \hat{i}_r} = \begin{vmatrix} (1)\lambda^{\hat{i}_1} & (1)\underline{\mu}_{\hat{i}_1} & \dots & (1)\lambda^{\hat{i}_t} & (t)\underline{\mu}_{\hat{i}_t} & (1)\lambda^{\hat{i}_{t+1}} & \dots & (1)\lambda^{\hat{i}_r} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ (t)\lambda^{\hat{i}_1} & (1)\underline{\mu}_{\hat{i}_1} & \dots & (t)\lambda^{\hat{i}_t} & (t)\underline{\mu}_{\hat{i}_t} & (t)\lambda^{\hat{i}_{t+1}} & \dots & (t)\lambda^{\hat{i}_r} \\ 0 & \dots & 0 & (t+1)\lambda^{\hat{i}_{t+1}} & \dots & (t+1)\lambda^{\hat{i}_r} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & (r)\lambda^{\hat{i}_{t+1}} & \dots & (r)\lambda^{\hat{i}_r} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} (t+1)\lambda^{\hat{i}_{t+1}} & (t+1)\lambda^{\hat{i}_{t+2}} & \dots & (t+1)\lambda^{\hat{i}_r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (r)\lambda^{\hat{i}_{t+1}} & (r)\lambda^{\hat{i}_{t+2}} & \dots & (r)\lambda^{\hat{i}_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1)\lambda^{\hat{i}_1} & (1)\underline{\mu}_{\hat{i}_1} & \dots & (1)\lambda^{\hat{i}_t} & (t)\underline{\mu}_{\hat{i}_t} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ (t)\lambda^{\hat{i}_1} & (1)\underline{\mu}_{\hat{i}_1} & \dots & (t)\lambda^{\hat{i}_t} & (t)\underline{\mu}_{\hat{i}_t} \end{vmatrix}.$$

Es ist somit $\bar{\pi}^{\hat{i}_1 \hat{i}_2 \dots \hat{i}_r}$ bis auf einen Faktor, der im nächsten Paragraph diskutiert wird, der normierte PLÜCKERSCHE Tensor jenes $V^{(r-t)}$ des $V^{(r)}$, der auf dem $V^{(t)}$ normal steht. Da dieser Faktor, wie gezeigt wird, im Falle der linearen Abhängigkeit der Vektoren ${}_{(\alpha)}\underline{\mu}_i$ ($\alpha = 1, \dots, t$) verschwindet, so gilt auch in diesem Falle die Formel (44).

§ 3. Das Messen (Fortsetzung).

Wir ordnen n in einem Punkte P des R_n definierten Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ das Volumen V zu, wobei V die positive Wurzel aus der Invariante

$$(1) \quad V^2 = \begin{vmatrix} g_{ik} & (1)\lambda^i & (1)\lambda^k & g_{ik} & (1)\lambda^i & (2)\lambda^k & \dots & g_{ik} & (1)\lambda^i & (n)\lambda^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{ik} & (n)\lambda^i & (1)\lambda^k & g_{ik} & (n)\lambda^i & (2)\lambda^k & \dots & g_{ik} & (n)\lambda^i & (n)\lambda^k \end{vmatrix}$$

ist. Da wir V^2 auch

$$(2) \quad V^2 = g |{}_{(\alpha)}\lambda^i|^2, \quad g = |g_{ik}| > 0$$

schreiben können, so ist V eine reelle positive Größe, die dann und nur

dann verschwindet, wenn die n Vektoren $(\alpha)\lambda^i$ linear abhängig sind.¹⁾ Neben (2) gilt auch

$$(2') \quad V^2 = \frac{1}{g} |(\alpha)\lambda_i|^2,$$

da

$$(3) \quad |g^{ik}| = \frac{1}{|g_{ik}|}$$

ist und wir in (1) statt $g_{ik} (\alpha)\lambda^i (\beta)\lambda^k$ auch $g^{ik} (\alpha)\lambda_i (\beta)\lambda_k$ hätten schreiben können.

Ist in P der r dimensionale Vektorraum $V^{(r)}$ durch das r -Bein

$$(4) \quad (\alpha)\lambda^i \quad (\alpha=1, \dots, r)$$

aufgespannt, so denken wir uns den Normalvektorraum $V^{(n-r)}$ des $V^{(r)}$ durch das *normierte* $n - r$ -Bein

$$(4') \quad (\alpha)\lambda^i \quad (\alpha=r+1, \dots, n)$$

aufgespannt. Dann gilt

$$(5) \quad (\alpha)\lambda_i (\beta)\lambda^i = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha=r+1, \dots, n; \beta=1, \dots, n)$$

Als *Beinvolumen* der r Vektoren (4) definieren wir das Volumen V der n Vektoren (4), (4'); die Determinante (1) zerfällt aber wegen (5) in ein Produkt von zwei Determinanten, deren zweite den Wert 1 hat, während die erste

$$(6) \quad V^2 = \begin{vmatrix} g_{ik} (\alpha)\lambda^i (\alpha)\lambda^k & g_{ik} (\alpha)\lambda^i (\beta)\lambda^k & \dots & g_{ik} (\alpha)\lambda^i (\gamma)\lambda^k \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ g_{ik} (\gamma)\lambda^i (\alpha)\lambda^k & g_{ik} (\gamma)\lambda^i (\beta)\lambda^k & \dots & g_{ik} (\gamma)\lambda^i (\gamma)\lambda^k \end{vmatrix}$$

wird, so daß V wegen (6) vom normierten $n - r$ -Bein (4') unabhängig ist. Wir hätten (6) von vornherein zur Definition des Beinvolumens V verwenden können, aber das eingeschlagene Verfahren gibt uns die Erkenntnis, daß auch hier $V^2 > 0$ ist.

Mehr noch, wir wissen, daß V dann und nur dann verschwindet, wenn die Vektoren (4) und (4') linear abhängig sind, d. h., da ja die Vektoren (4') untereinander und von den Vektoren (4) unabhängig sind, wenn die Vektoren (4) linear abhängig sind. Das von uns definierte Beinvolumen ist also für unabhängige Vektoren stets größer als Null. $V = 0$ ist das Kriterium der *Abhängigkeit*. Wir können statt (6) auch schreiben

1) Manche Autoren definieren $V = \sqrt{|g|} |(\alpha)\lambda^i|$ mit $\sqrt{|g|} > 0$, wodurch auch negative Volumina auftreten. Die Definition ist aber dann vom Bezugssystem abhängig, daher nicht zu empfehlen.

$$(7) \quad V^2 = \begin{vmatrix} (1)\lambda_{i_1}^{i_1} & (1)\lambda_{i_2}^{i_1} & (1)\lambda_{i_3}^{i_1} & \dots & (1)\lambda_{i_r}^{i_1} & (r)\lambda_{i_r}^{i_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ (r)\lambda_{i_1}^{i_1} & (r)\lambda_{i_2}^{i_1} & (r)\lambda_{i_3}^{i_1} & \dots & (r)\lambda_{i_r}^{i_1} & (r)\lambda_{i_r}^{i_1} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(i_1 i_2 \dots i_r)} \begin{vmatrix} (1)\lambda_{i_1}^{i_1} & \dots & (1)\lambda_{i_r}^{i_1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ (r)\lambda_{i_1}^{i_1} & \dots & (r)\lambda_{i_r}^{i_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1)\lambda_{i_1}^{i_2} & \dots & (1)\lambda_{i_r}^{i_2} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ (1)\lambda_{i_1}^{i_r} & \dots & (1)\lambda_{i_r}^{i_r} \end{vmatrix}$$

(Summation wie in (8, 41)), also verschwindet V^2 , wie wir bereits wissen, für linear abhängige Vektoren (4). Entwickeln wir (7) weiter, so ergibt

$$(8) \quad \begin{vmatrix} (1)\lambda_{i_1}^{i_1} & (1)\lambda_{i_2}^{i_1} & \dots & (1)\lambda_{i_r}^{i_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (r)\lambda_{i_1}^{i_1} & (r)\lambda_{i_2}^{i_1} & \dots & (r)\lambda_{i_r}^{i_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} (1)\lambda^{j_1} & g_{i_2 j_1} (1)\lambda^{j_1} & \dots & g_{i_r j_1} (1)\lambda^{j_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ g_{i_1 j_r} (r)\lambda^{j_r} & g_{i_2 j_r} (r)\lambda^{j_r} & \dots & g_{i_r j_r} (r)\lambda^{j_r} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(j_1 j_2 \dots j_r)} \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_2 j_1} & \dots & g_{i_r j_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ g_{i_1 j_r} & g_{i_2 j_r} & \dots & g_{i_r j_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1)\lambda^{j_1} & \dots & (1)\lambda^{j_r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ (r)\lambda^{j_1} & \dots & (r)\lambda^{j_r} \end{vmatrix}$$

in (7) eingesetzt

$$(9) \quad V^2 = \sum_{(i_1 \dots i_r) (j_1 \dots j_r)} \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & \dots & g_{i_r j_1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ g_{i_1 j_r} & \dots & g_{i_r j_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1)\lambda^{i_1} & \dots & (1)\lambda^{i_r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ (r)\lambda^{i_1} & \dots & (r)\lambda^{i_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1)\lambda^{j_1} & \dots & (1)\lambda^{j_r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ (r)\lambda^{j_1} & \dots & (r)\lambda^{j_r} \end{vmatrix},$$

wo in der Summe rechts jede Kombination $(i_1 \dots i_r)$ und $(j_1 \dots j_r)$ gerade je einmal auftritt. Da $V^2 \geq 0$ ist und $= 0$ nur, wenn der Tensor

$$(10) \quad \begin{vmatrix} (1)\lambda^{i_1} & (1)\lambda^{i_2} & \dots & (1)\lambda^{i_r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (r)\lambda^{i_1} & (r)\lambda^{i_2} & \dots & (r)\lambda^{i_r} \end{vmatrix}$$

verschwindet, ist V^2 eine positiv definite quadratische Form dieses PLÜCKER-
schen Tensors.¹⁾

Ist $(\omega)\sigma_i$ ein normiertes n -Bein im Punkte P , so gilt, wie wir wissen,

$$(11) \quad g_{ik} = (\omega)\sigma_i (\omega)\sigma_k.$$

Sind dann μ^i und ν^i zwei beliebige Vektoren in P , so ist nach (11)

$$(12) \quad g_{ik} \mu^i \nu^k = (\omega)\sigma_i \mu^i (\omega)\sigma_k \nu^k.$$

1) Allgemein ist

$$\sum_{(i_1 \dots i_r) (j_1 \dots j_r)} \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & \dots & g_{i_r j_1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ g_{i_1 j_r} & \dots & g_{i_r j_r} \end{vmatrix} \eta^{i_1 \dots i_r} \eta^{j_1 \dots j_r}$$

eine positiv definite quadratische Form des allgemeinen alternierenden Tensors $\eta^{i_1 \dots i_r}$.
Man überzeugt sich davon leicht durch Einführung spezieller Koordinaten, für die
im betrachteten Punkt $g_{ik} = \delta_{ik}$ ist.

Ferner gilt die Darstellung

$$(13) \quad \mu_i = g_{ik} \mu^k = {}_{(\alpha)}\sigma_k \mu^k {}_{(\alpha)}\sigma_i = {}_{(\alpha)}\mu {}_{(\alpha)}\sigma_i, \quad \nu_i = {}_{(\alpha)}\nu {}_{(\alpha)}\sigma_i,$$

wo die Darstellungszahlen

$$(14) \quad {}_{(\alpha)}\mu = {}_{(\alpha)}\sigma_k \mu^k, \quad {}_{(\alpha)}\nu = {}_{(\alpha)}\sigma_k \nu^k$$

die Beinkomponenten der Vektoren μ^i und ν^i in bezug auf das normierte Bein ${}_{(\alpha)}\sigma_i$ heißen. Nach (12) gilt dann

$$(15) \quad g_{ik} \mu^i \nu^k = {}_{(\alpha)}\mu {}_{(\alpha)}\nu.$$

Mittels der Beinkomponenten in bezug auf ein normiertes n -Bein werden demnach die Längen und Winkel von Vektoren „euklidisch“ gemessen, d. h. wie in einem auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen euklidischen R_n . Insbesondere erhält V^2 (6) die Form

$$(16) \quad V^2 = \begin{vmatrix} {}_{(\alpha)}\sigma_i (1) \lambda^i & {}_{(\alpha)}\sigma_k (1) \lambda^k & \dots & {}_{(\alpha)}\sigma_i (1) \lambda^i & {}_{(\alpha)}\sigma_k (r) \lambda^k \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ {}_{(\alpha)}\sigma_i (r) \lambda^i & {}_{(\alpha)}\sigma_k (1) \lambda^k & \dots & {}_{(\alpha)}\sigma_i (r) \lambda^i & {}_{(\alpha)}\sigma_k (r) \lambda^k \end{vmatrix}.$$

Ohne diesen Ausdruck weiter zu entwickeln, sei jetzt ${}_{(\alpha)}\sigma_i$ so konstruiert, daß seine r ersten Vektoren gerade den Vektorraum der ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) aufspannen; dann ist

$${}_{(\alpha)}\sigma_i (r) \lambda^i = 0$$

für $\alpha > r$ und die Determinante (16) wird eine Quadratdeterminante

$$(17) \quad V^2 = \begin{vmatrix} (1)\sigma_i (1) \lambda^i & (1)\sigma_i (2) \lambda^i & \dots & (1)\sigma_i (r) \lambda^i \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (r)\sigma_i (1) \lambda^i & (r)\sigma_i (2) \lambda^i & \dots & (r)\sigma_i (r) \lambda^i \end{vmatrix}^2.$$

Der Vergleich mit (2, 44) zeigt, daß der dort auftretende Faktor bis auf das Vorzeichen [da dort ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ($\alpha = 1, \dots, t$) ein normiertes, den t dimensionalen Vektorraum ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ($\alpha = 1, \dots, t$) aufspannendes t -Bein ist] das *Beinvolumen* der t Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ist.

§ 4. Die t dimensionalen Mannigfaltigkeiten des R_n .

Es sei

$$(1) \quad x_i = x_i(t) \quad (i=1, \dots, n)$$

eine stetig differenzierbare Kurve C im R_n , bezogen auf den Parameter t . Das Integral

$$(2) \quad s = \int_{t_0}^t \sqrt{g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}} dt$$

vom Punkt $P_0 (t = t_0)$ von C längs C nach $P(t)$ integriert, heißt die Länge des Kurvenbogens $\overline{P_0 P}$. Diese Größe hängt nur vom Kurvenbogen $\overline{P_0 P}$ ab und nicht vom Parameter t , auf den C bezogen ist. Bei Fixierung von P_0 wird s eine Funktion des Parameters t von P , für die nach (2)

$$(2') \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}}$$

gilt. War t bereits die von irgendeinem festen Punkt aus gemessene Bogenlänge, also $t = s + c$, wo c konstant ist, so folgt aus (2')

$$(3) \quad g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = 1.$$

Beziehen wir also eine Kurve C auf ihre Bogenlänge als Parameter, so wird

$$(4) \quad \xi^i = \frac{dx_i}{ds}$$

ein Einheitsvektor, der Tangentenvektor oder Richtungsvektor von C im betrachteten Punkte heißt.

Ist $\Phi = f(x_1, \dots, x_n)$ ein im (integrablen) Gebiete G definierter stetiger Skalar, so ist das über dieses Gebiet erstreckte n -fache Integral

$$(5) \quad J = \int \sqrt{g} \Phi dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

die Wurzel positiv genommen, eine Invariante. Im Koordinatensysteme $\bar{x}_i, x_i = \varphi_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, berechnet sich J in der Form

$$(6) \quad J = \int \sqrt{g} \Phi \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} \right| d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_n,$$

wo $\sqrt{g} \Phi$ nunmehr als Funktion der \bar{x}_i zu gelten hat, und $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$ die Funktionaldeterminante der Transformation

$$(7) \quad x_i = \varphi_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

ist. Aber aus

$$(8) \quad \bar{g}_{pq} = g_{ik} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_p} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{x}_q}$$

folgt

$$(9) \quad \bar{g} = g \left(\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} \right)^2,$$

also

$$|\sqrt{\bar{g}}| = |\sqrt{g}| \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} \right|.$$

Wir erhalten daher aus (6)

$$(10) \quad J = \int \sqrt{\bar{g}} \Phi d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_n,$$

die Wurzel positiv genommen; womit die Invarianz von J bewiesen ist. Setzen wir $\Phi = 1$, so bezeichnet man die Invariante

$$(11) \quad V = \int \sqrt{\bar{g}} d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_n,$$

die Wurzel positiv genommen, als das Volumen des n dimensionalen Gebietes G , über das integriert wird.

Wir wenden uns nun zu den l dimensionalen Mannigfaltigkeiten F_l des R_n und beweisen zuerst den Hilfssatz:

Sind in einem Gebiete des R_n die m stetig differenzierbaren Funktionen

$$(12) \quad f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$$

definiert, so ist die Anzahl der unabhängigen Funktionen der Reihe (12) in diesem Gebiete gleich dem Rang der Matrix

$$(13) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Hat in einem Punkte P_0 dieses Gebietes und in der Umgebung von P_0 die Matrix (13) den Rang m , so kann man das System

$$(14) \quad f_1(x_1, \dots, x_n) = f_1, f_2(x_1, \dots, x_n) = f_2, \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) = f_m,$$

wenn z. B. im Punkte P_0

$$(15) \quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \neq 0 \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

ist, nach x_1, \dots, x_m auflösen:

$$(16) \quad x_1 = x_1(f_1, \dots, f_m, x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, x_m = x_m(f_1, \dots, f_m, x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Dabei gilt (16) in einer Umgebung von P_0 ($f_1^0, \dots, f_m^0, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0$). In dieser Umgebung ist der R_n durch die neuen Koordinaten $f_1, \dots, f_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ beschrieben, die also unabhängig sind. Wir haben damit in Erinnerung gebracht, daß die m Funktionen (12) *sicher unabhängig* sind, wenn die Matrix (13) den Rang m hat.

Ist $r \leq m$ der Rang der Matrix (13), so können wir bei eventueller Umnomerierung erreichen, daß

$$(17) \quad \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \neq 0 \quad (i, j = 1, \dots, r)$$

ist. (Dies alles gilt für den Punkt P_0 und dessen Umgebung!) Nach dem eben Gesagten sind die r Funktionen f_1, \dots, f_r dann sicher unabhängig. Wir betrachten nun in P_0 und Umgebung das folgende System von $n - r$ (unabhängigen) linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für die unbekannte Funktion $\Phi(x_1, \dots, x_n)$

$$(18) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} & \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi}{\partial x_r} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_i} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_i} & \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \frac{\partial f_r}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} = 0 \quad (i = r+1, \dots, n).$$

Ein solches System hat höchstens $n - (n - r) = r$ unabhängige Lösungen (es heißt dann *vollständig*) und jede weitere Lösung ist eine Funktion dieser unabhängigen Lösungen.¹⁾ Nun ist infolge der Voraussetzung betreffs des Ranges von (18) jede der m Funktionen (12) eine Lösung von (18), und zwar sind f_1, \dots, f_r gerade r unabhängige Lösungen. Also ist in der Tat

$$(19) \quad f_i = f_i(f_1, \dots, f_r) \quad (i = r+1, \dots, m),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Eine durch l Parameter y_1, \dots, y_l in der Parameterdarstellung

$$(20) \quad x_i = x_i(y_1, \dots, y_l)$$

gegebene Punktmenge des R_n heißt *l dimensionale Hyperfläche*, auch *l dimensionale Mannigfaltigkeit*, wenn die $x_i(y_1, \dots, y_l)$ stetig differenzierbare Funktionen der Parameter y_1, \dots, y_l sind und wenn sich diese Punktmenge nicht durch weniger als l Parameter in der Form (20) darstellen läßt. Sind die Funktionen $x_i(y_1, \dots, y_l)$ in (20) stetig differenzierbar, so kann (20) nur dann eine l dimensionale Hyperfläche F_l darstellen, wenn die Matrix

$$(21) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_l} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_l} \end{vmatrix}$$

den Rang l hat. Dies folgt aus dem eben bewiesenen Hilfssatz für die n Funktionen $x_i(y_1, \dots, y_l)$ der l Variablen (wobei jetzt $m = n$, $n = l$ zu setzen ist).

Wir denken uns nun die Koordinaten so numeriert, daß in P_0

$$(21') \quad \left| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right| \neq 0 \quad (i, j = 1, \dots, l)$$

ist; dann lassen sich in einer Umgebung von $P_0(y_1^0, \dots, y_l^0)$ die $x_i(y_1, \dots, y_l) = x_i$ ($i = 1, \dots, l$) nach den y_t ($t = 1, \dots, l$) auflösen:

$$(22) \quad y_t = y_t(x_1, \dots, x_l) \quad (t = 1, \dots, l).$$

1) Vgl. etwa SERRAT-SCHEFFERS, *Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung*, Bd. 3, S. 865 ff.

Die Relationen (22) gelten in einer gewissen Umgebung der Stelle $x_i^0 = x_i(y_1^0, \dots, y_l^0)$, und die $y_t(x_1, \dots, x_n)$ sind stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente. Ferner folgt aus (20) und (22) (für diese Umgebung von P_0), daß die Zuordnung der Punkte der F_l zu den l -Tupeln y_1, \dots, y_l ein-eindeutig ist.

Sei jetzt

$$(23) \quad x_i = \bar{x}_i(z_1, \dots, z_k) \quad (i=1, \dots, n),$$

wo die x_i stetig differenzierbare Funktionen sind, eine zweite Darstellung der Mannigfaltigkeit (20) in der Umgebung von $P_0(z_1^0, \dots, z_k^0)$; dabei besitze die (21) entsprechende Matrix den Rang k . Dann lassen sich, wie eben gezeigt wurde, die z_1, \dots, z_k durch k der x_i ($i=1, \dots, n$) darstellen:

$$(24) \quad z_s = z_s(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_k}),$$

wobei die z_s stetig differenzierbare Funktionen von $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k}$ sind. Aus (20), (22), (23) und (24) erhalten wir dann in P_0 und Umgebung

$$(25) \quad y_t = y_t(z_1, \dots, z_k) \quad (t=1, \dots, l)$$

$$(25') \quad z_s = z_s(y_1, \dots, y_l) \quad (s=1, \dots, k)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $y_t(z_1, \dots, z_k)$ und $z_s(y_1, \dots, y_l)$. Wegen

$$(26) \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_t} = \frac{\partial x_i}{\partial z_h} \frac{\partial z_h}{\partial y_t}$$

$$\text{ist} \quad \left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_t} \right\| = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial z_h} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial z_h}{\partial y_t} \right\|.$$

Die Matrix $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_t} \right\|$ hat demnach höchstens den Rang k der Matrix $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial z_h} \right\|$, d. h. es ist $l \leq k$. Ebenso zeigt man, daß $l \geq k$ ist, d. h. es gilt $l = k$. Somit ist notwendig und hinreichend, damit (20) eine F_l darstellt, daß die Matrix (21) den Rang l besitzt.

Gleichzeitig gewinnen wir aus (25) und (25') die Transformationsgleichungen für zwei dieselbe F_l darstellende Parametersysteme in der Form

$$(27) \quad \begin{cases} y_t = y_t(z_1, \dots, z_l) \\ z_t = z_t(y_1, \dots, y_l) \end{cases} \quad (t=1, \dots, l)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $y_t(z_1, \dots, z_l)$ und $z_t(y_1, \dots, y_l)$. Die Funktionaldeterminanten

$$(28) \quad \left| \frac{\partial y_t}{\partial z_h} \right|, \quad \left| \frac{\partial z_t}{\partial y_h} \right|$$

sind demnach von Null verschieden.

Wir notieren ferner das wichtige Ergebnis: Für jeden Punkt P_0 der F_l gibt es eine auf der F_l gelegene Umgebung von P_0 , deren Punkte sich durch

$$(29) \quad x_i = x_i(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_l}) \quad (i=1, \dots, n)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_i(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})$ darstellen lassen, wobei noch $x_{\alpha_j}(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l}) = x_{\alpha_j}$ ($j=1, \dots, l$) ist.

Eine l dimensionale Mannigfaltigkeit F_l ist nichts anderes als ein l dimensionaler Raum R_l , wie er in I, § 1 mit größerer Ausführlichkeit besprochen wurde. Wir wollen nun wie dort die Annahme machen, *es wäre sinnvoll, in diesem R_l von ρ fach stetig differenzierbaren Funktionen der Punkte des R_l zu sprechen.*¹⁾ Dadurch wird eine Gesamtheit zulässiger Parametersysteme $\{y_1, \dots, y_l\}$ der F_l herausgegriffen, in bezug auf welche die ρ fach stetig differenzierbaren Funktionen der Punkte der F_l stetige Ableitungen bis einschließlich zur ρ ten Ordnung besitzen. Von einem zulässigen Parametersystem $\{y_1, \dots, y_l\}$ zu einem zweiten $\{z_1, \dots, z_l\}$ führt eine Transformation (27), in der die auftretenden Funktionen ρ fach stetig differenzierbar sind.

Nun sind die Punkte dieser F_l im R_n enthalten, also wird eine in jedem Punkte des R_n definierte Funktion der Punkte des R_n in der F_l zu einer Funktion der Punkte dieser F_l führen. Dabei sollen sich die Stetigkeitsverhältnisse in der Art übertragen, *daß jede ρ fach stetig differenzierbare Funktion der Punkte des R_n , als Funktion in der F_l betrachtet, ebenfalls ρ fach stetig differenzierbar ist.* Ist der R_n auf m -Systeme bezogen, so kann demnach ρ höchstens gleich m sein. Da die Koordinaten eines m -Systems m fach stetig differenzierbare Funktionen im R_n , also wegen $\rho \leq m$ ρ fach stetig differenzierbare Funktionen im R_n sind, so werden sie in der F_l ρ fach stetig differenzierbare Funktionen in bezug auf jedes zulässige Parametersystem sein. Ist (20) eine solche, auf zulässige Parameter bezogene F_l , so müssen die Funktionen $x_i(y_1, \dots, y_l)$ demnach ρ fach stetig differenzierbar sein. *Eine F_l dieser Eigenschaft wollen wir eine ρ fach stetig differenzierbare F_l nennen.* In einer solchen hat es demnach einen Sinn, von σ fach stetig differenzierbaren Funktionen der F_l zu sprechen, wenn $\sigma \leq \rho$ ist. Insbesondere sind die σ fach stetig differenzierbaren Funktionen des R_n ebensolche Funktionen in der F_l .

Sei $x_i = x_i(t)$ eine stetig differenzierbare Kurve des R_n , die ganz in der F_l (20) liegt. Wegen (22) sind dann die $y_h = y_h(x_1, \dots, x_n)$ ($h=1, \dots, l$) stetig differenzierbare Funktionen des Kurvenparameters t ; also erhalten wir die allgemeinste stetig differenzierbare Raumkurve, die in der F_l liegt, in der Parameterdarstellung $y_h = y_h(t)$ ($h=1, \dots, l$) mit stetig differenzierbaren $y_h(t)$. Ist die F_l ρ fach stetig differenzierbar, so sind die $y_h(x_1, \dots, x_n)$ in (22)

1) Besser von σ fach stetig differenzierbaren Funktionen, wo $\sigma \leq \rho$ ist.

ebenfalls ρ fach stetig differenzierbar und jede τ fach ($\tau \leq \rho$) stetig differenzierbare Kurve $x_i = x_i(t)$ des R_n , die in der F_l liegt, hat in der F_l die Parameterdarstellung $y_h = y_h(t)$ ($h = 1, \dots, l$) mit τ fach stetig differenzierbaren $y_h(t)$.

Betrachten wir die Gesamtheit aller stetig differenzierbaren Kurven der F_l , die durch P gehen, so spannen ihre Tangentenvektoren in P einen Vektorraum auf, der *Tangentenvektorraum der F_l in P* genannt wird. Ist

$$x_i = x_i(y_1(t), \dots, y_l(t))$$

eine solche Kurve, so gilt in P

$$(30) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{dy_\alpha}{dt} \quad (i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, l).$$

Der Tangentenvektorraum in P wird nach (30) von den l Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, l$) aufgespannt, die wegen des Ranges der Matrix (21) linear unabhängig sind. Er ist somit l dimensional.

Wir sagen, ein Vektor λ des Punktes P der F_l liegt in der F_l oder ist ein *Flächenvektor*, wenn er im Tangentenvektorraum der F_l in P liegt. Seine kontravarianten Komponenten λ^α haben demnach die Darstellung

$$(31) \quad \lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \lambda^\alpha \quad (i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, l).$$

Hält man die Raumkoordinaten fest und transformiert nur die Parameter

$$(32) \quad \bar{y}_\alpha = \bar{y}_\alpha(y_1, \dots, y_l) \quad (\alpha = 1, \dots, l),$$

so ändern sich die Raumkomponenten λ^i ($i = 1, \dots, n$) natürlich nicht. Daher gilt

$$(33) \quad \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_\alpha} \bar{\lambda}^\alpha = \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \lambda^\beta = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_\alpha} \frac{\partial \bar{y}_\alpha}{\partial y_\beta} \lambda^\beta \quad (i = 1, \dots, n; \alpha, \beta = 1, \dots, l)$$

oder

$$(34) \quad \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_\alpha} \left(\bar{\lambda}^\alpha - \frac{\partial \bar{y}_\alpha}{\partial y_\beta} \lambda^\beta \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n, \alpha, \beta = 1, \dots, l).$$

Da der Rang der Matrix $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_\alpha} \right\|$ gleich l ist, folgt aus (34)

$$(35) \quad \bar{\lambda}^\alpha = \frac{\partial \bar{y}_\alpha}{\partial y_\beta} \lambda^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, l)$$

Die in (31) auftretenden Darstellungszahlen λ^α ($\alpha = 1, \dots, l$) des Flächenvektors λ^i bilden somit das Komponentensystem eines in der F_l ($\equiv R_l$) in P definierten kontravarianten Vektors

$$(36) \quad y_1, \dots, y_l; \quad \bar{\lambda}^1, \dots, \bar{\lambda}^l.$$

Bezüglich der Transformationen der Koordinaten x_i im R_n sind dagegen die Größen $\bar{\lambda}^\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, l$) Skalare. Ebenso folgt aus der Invarianz der $x_i(y_1, \dots, y_l) = \bar{x}_i(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l)$ in bezug auf Parametertransformationen, daß

$$(37) \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} = (i) \lambda_\alpha \quad (i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, l)$$

ein System von n kovarianten Vektoren der F_l darstellt. Bezüglich der Koordinatentransformationen des R_n stellen die Größen (37) l kontravariante Vektoren dar, die den Tangentenvektorraum aufspannen. Derartige Größen werden wir in VII ausführlicher behandeln.

Für den Flächenvektor λ^i (31) ist

$$(38) \quad g_{ik} \lambda^i \lambda^k = g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} l^\alpha l^\beta = \gamma_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta$$

eine Invariante, also

$$(39) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha} = g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, l)$$

bezüglich der Parametertransformationen das Komponentensystem eines symmetrischen, positiv definiten, kovarianten Tensors zweiter Stufe, der als *Maßtensor der F_l* anzusehen ist: Er ist positiv definit, denn $\gamma_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta = 0$ hat nach (38) $\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} l^\alpha = 0$ zur Folge, woraus wegen der Unabhängigkeit der l Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}$ sofort $l^\alpha = 0$ folgt. Für zwei Flächenvektoren λ^i und $\mu^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} m^\alpha$ folgt aus (39)

$$(40) \quad g_{ik} \lambda^i \mu^k = \gamma_{\alpha\beta} l^\alpha m^\beta.$$

Nennen wir l^α ($\alpha = 1, \dots, l$) die *kontravarianten Flächenkomponenten* des Flächenvektors λ^i ($i = 1, \dots, n$), so zeigt (40), daß man Längen und Winkel von Flächenvektoren mittels dieser Flächenkomponenten und des Maßtensors $\gamma_{\alpha\beta}$ der l -dimensionalen Mannigfaltigkeit in der üblichen Art zu berechnen hat. Die Metrik des R_n induziert somit auch in der Hyperfläche F_l eine Metrik, so daß diese ebenfalls ein (l -dimensionaler) RIEMANNscher Raum wird.

Aus (31) folgt durch Überschiebung mit $g_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta}$ wegen (39)

$$(41) \quad \lambda_k \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} = l_\beta \quad (k = 1, \dots, n, \beta = 1, \dots, l);$$

in dieser Weise hängen die kovarianten Raumkomponenten λ_k ($k = 1, \dots, n$) und die kovarianten Flächenkomponenten des Flächenvektors λ (31) zusammen.

Als *Volumen eines l -dimensionalen integrierbaren Raumstückes der F_l* definieren wir jetzt

$$(42) \quad V = \int \sqrt{\gamma} dy_1 \dots dy_l,$$

erstreckt über dieses Raumstück. Dabei ist $\gamma = |\gamma_{\alpha\beta}|$. Man beachte, daß $\gamma_{\alpha\beta}$ (39) vom Koordinatensystem x_i nicht abhängt, so daß V eine Invariante gegenüber Parameter- und Raumtransformationen ist.¹⁾

Wir wollen noch, mehr als Übung zu dem bisher Gesagten, den *Projektionstensor und den normierten Plücker'schen Tensor des Tangentenvektorraumes*

1) Die Formeln (2) und (11) sind Sonderfälle von (42) für $l=1$ und $l=n$.

eines Punktes P der F_l aufstellen. Sind $(\alpha)\lambda^t$ ($t, \alpha = 1, \dots, l$) die kontravarianten Flächenkomponenten eines normierten l -Beins der F_l , so sind

$$(43) \quad (\alpha)\lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} (\alpha)\lambda^t \quad (i=1, \dots, n; \alpha, t=1, \dots, l)$$

die kontravarianten Raumkomponenten dieser l Flächenvektoren. Wegen

$$(44) \quad \gamma^{ts} = (\alpha)\lambda^t (\alpha)\lambda^s \quad (\alpha, t, s=1, \dots, l),$$

wo γ^{ts} der kontravariante Maßtensor der F_l ist, erhalten wir für den Projektionstensor

$$(45) \quad p^{ik} = (\alpha)\lambda^i (\alpha)\lambda^k = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} \gamma^{ts},$$

da ja $(\alpha)\lambda^i$ wegen (40) ein normiertes l -Bein im R_n ist.

Für den normierten PRÜCKERschen Tensor

$$\begin{vmatrix} (\alpha)\lambda^{i_1} & \dots & (\alpha)\lambda^{i_l} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ (\beta)\lambda^{i_1} & \dots & (\beta)\lambda^{i_l} \end{vmatrix} = \pi^{i_1 \dots i_l}$$

erhalten wir

$$(46) \quad \pi^{i_1 i_2 \dots i_l} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_{i_l}}{\partial y_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_l} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_l} & \dots & \frac{\partial x_{i_l}}{\partial y_l} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\alpha)\lambda^1 & (\alpha)\lambda^2 & \dots & (\alpha)\lambda^l \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (\beta)\lambda^1 & (\beta)\lambda^2 & \dots & (\beta)\lambda^l \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_{i_l}}{\partial y_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_l} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_l} & \dots & \frac{\partial x_{i_l}}{\partial y_l} \end{vmatrix},$$

($\gamma = |\gamma_{ik}|$). Aus $\gamma^{ik} = (\alpha)\lambda^i (\alpha)\lambda^k$ folgt ja $|\alpha)\lambda^i| = \sqrt{\gamma^{-1}}$ (es ist $|\gamma^{ik}| |\gamma_{ik}| = 1$).

IV. Formeln von Frenet. Der euklidische Raum

§ I. Kurven im Riemannschen R_n .

Wir denken uns eine Kurve C in der Parameterdarstellung

$$(1) \quad x_i = x_i(s)$$

gegeben, wo s die von einem festen Punkt P_0 aus gemessene Bogenlänge von C ist. Die Funktionen $x_i(s)$ seien zweimal stetig differenzierbar. In jedem Punkt von C sei weiter ein stetig differenzierbarer Einheitsvektor ${}_{(1)}\eta^i$ definiert, z. B. ${}_{(1)}\eta^i = \frac{dx_i}{ds}$. Aus

$$(2) \quad g_{ik} {}_{(1)}\eta^i {}_{(1)}\eta^k = 1$$

folgt dann wegen $\delta g_{ik} = 0$ durch absolute Differentiation nach s

$$(2') \quad \frac{d}{ds} (g_{ik} {}_{(1)}\eta^i {}_{(1)}\eta^k) = 2g_{ik} \frac{d {}_{(1)}\eta^i}{ds} {}_{(1)}\eta^k = 0.$$

Der längs C definierte stetige Vektor $\frac{d {}_{(2)}\eta^i}{ds}$ steht somit auf ${}_{(1)}\eta^i$ normal.¹⁾

Durch die Tensorrelation

$$(3) \quad \frac{d {}_{(1)}\eta^i}{ds} = \frac{{}_{(2)}\eta^i}{\sigma_1},$$

wo $\frac{1}{\sigma_1}$ ein skalarer Normierungsfaktor ist, definieren wir den Einheitsvektor ${}_{(2)}\eta^i$, der auf ${}_{(1)}\eta^i$ normal steht und in die Richtung $\frac{d {}_{(1)}\eta^i}{ds}$ oder in die entgegengesetzte $-\frac{d {}_{(1)}\eta^i}{ds}$ fällt, je nachdem σ_1^{-1} positiv oder negativ gewählt wird. Der Normierungsfaktor

$$(3') \quad \frac{1}{\sigma_1} = \sqrt{g_{ik} \frac{d {}_{(1)}\eta^i}{ds} \frac{d {}_{(1)}\eta^k}{ds}}$$

ist als Normierungsfaktor eines endlichen Vektors stets endlich. Nur im Falle $\frac{1}{\sigma_1} = 0$ versagt die zu ${}_{(2)}\eta^i$ führende Konstruktion, da dann $\frac{d {}_{(1)}\eta^i}{ds} = 0$ und ${}_{(2)}\eta^i$ in (3) unbestimmt ist. In P_0 entscheiden wir nun willkürlich betreffs des Vorzeichens der Wurzel in (3'), treffen aber dann die Vereinbarung, daß ${}_{(2)}\eta^i$

1) Der Maßtensor g_{ik} wird als n -mal stetig differenzierbar vorausgesetzt.

längs C stetig variere, wodurch dann längs C das Vorzeichen von σ_1^{-1} festgelegt ist.¹⁾

Ist $(2)\eta^i$ längs C noch stetig differenzierbar, so können wir einen dritten Vektor $(3)\eta^i$ längs C konstruieren, der mit $(1)\eta^i$ und $(2)\eta^i$ ein normiertes Dreibein bildet. Aus $g_{ik}(2)\eta^k(2)\eta^i = 1$ folgt wie oben, daß der stetige Vektor $\frac{d(2)\eta^i}{ds}$ auf $(2)\eta^i$ normal steht. Bezeichnen wir mit $(3)\bar{\eta}^i$ die Projektion von $\frac{d(2)\eta^i}{ds}$ in den Normalraum von $(1)\eta^i$, so gilt

$$(4) \quad \frac{d(2)\eta^i}{ds} = A(1)\eta^i + (3)\bar{\eta}^i,$$

wo $(1)\eta_i(3)\eta^i = 0$ ist. Durch Überschiebung von (4) mit $(1)\eta_i$ folgt wegen $(1)\eta_i(2)\eta^i = 0$

$$(5) \quad A = (1)\eta_i \frac{d(2)\eta^i}{ds} = - (2)\eta^i \frac{d(1)\eta_i}{ds} = - (2)\eta^i (2)\eta_i \frac{1}{\sigma_1} = - \frac{1}{\sigma_1}.$$

Durch die Normierung

$$(5') \quad (3)\bar{\eta}^i = \frac{(3)\eta^i}{\sigma_2},$$

wo $\frac{1}{\sigma_2}$ ein skalarer Normierungsfaktor ist, definieren wir nun den auf $(1)\eta^i$ und $(2)\eta^i$ senkrecht stehenden dritten Einheitsvektor $(3)\eta^i$, wobei wie oben das Vorzeichen von σ_2^{-1} in P_0 wieder willkürlich gewählt werden kann, aber dann, wenn wir *Stetigkeit des Vektors $(3)\eta^i$ vereinbaren, in allen anderen Punkten von C festgelegt ist.*²⁾ Der Skalar $\frac{1}{\sigma_2}$ selbst ist dann längs C stetig. Wir erhalten aus

(4), (5), (5')

$$(6) \quad \frac{d(2)\eta^i}{ds} = - \frac{(1)\eta^i}{\sigma_1} + \frac{(3)\eta^i}{\sigma_2}.$$

Die Konstruktion des Vektors $(3)\eta^i$ versagt, wenn $\frac{1}{\sigma_2} = 0$ ist; er wird dann unbestimmt. Ist der Vektor $(3)\eta^i$ stetig differenzierbar, so ist die Konstruktion fortsetzbar und wir gelangen zu einem vierten Einheitsvektor $(4)\eta^i$, der mit $(1)\eta^i$, $(2)\eta^i$ und $(3)\eta^i$ ein normiertes Vierbein bildet. Wir wollen gleich allgemein annehmen, wir hätten schrittweise längs C das normierte k -Bein ($k \leq n$) der k stetig differenzierbaren Einheitsvektoren

$$(7) \quad (1)\eta^i, (2)\eta^i, \dots, (k)\eta^i$$

1) Dieser Vereinbarung kann man auf einem Bogen von C , längs welchem σ_1^{-1} nicht verschwindet, sicher nachkommen. Wenn im folgenden von der Kurve C gesprochen wird, so meinen wir einen Bogen derselben, für den $(3)\eta^i$ stetig bestimmbar ist.

2) Dieser Vereinbarung kann man auf einem Bogen von C , längs welchem σ_2^{-1} nicht verschwindet, sicher nachkommen, da $(3)\bar{\eta}^i$ nach (4), (5) und (3') ein stetiger Vektor ist, dessen Länge $\pm \sigma_2^{-1}$ auf einem solchen Bogen stetig und ungleich Null ist, und da nach (5') $(3)\eta^i = (3)\bar{\eta}^i \cdot \sigma_2^{-1}$ ist. Wenn im folgenden von der Kurve C gesprochen wird, so meinen wir einen Bogen derselben, für den $(2)\eta^i$ und $(3)\eta^i$ stetig bestimmbar sind.

konstruiert, das den Relationen

$$(8) \quad \frac{d_{(j)}\eta^i}{ds} = -\frac{g_{-1}\eta^i}{\sigma_{j-1}} + \frac{g_{+1}\eta^i}{\sigma_j} \quad (j = 1, \dots, k-1; \frac{1}{\sigma_0} = 0)$$

genügt, wobei die Skalare σ_j^{-1} stetige Funktionen von s sind. Wir können dann einen $k+1$ ten Einheitsvektor so konstruieren, daß für das normierte $k+1$ -Bein $(\alpha)\eta^i$ ($\alpha = 1, \dots, k+1$) die Relationen (8) gelten. Aus $g_{ij}(\alpha)\eta^i(\alpha)\eta^j = 1$ (nicht summieren über k !) folgt durch absolute Differentiation, daß der stetige Vektor $\frac{d_{(\alpha)}\eta^i}{ds}$ längs C auf $(\alpha)\eta^i$ normal steht. Bezeichnen wir mit $(k+1)\bar{\eta}^i$ die Projektion von $\frac{d_{(k)}\eta^i}{ds}$ in den Normalvektorraum des Vektorraumes $\{(1)\eta^i, (2)\eta^i, \dots, (k-1)\eta^i\}$, so gilt die Darstellung

$$(9) \quad \frac{d_{(k)}\eta^i}{ds} = \sum_{\alpha=1}^{k-1} (\alpha)A (\alpha)\eta^i + (k+1)\bar{\eta}^i,$$

wo also $(\alpha)\eta_i (k+1)\bar{\eta}^i = 0$ ($\alpha = 1, \dots, k-1$) ist. Überschiebt man (9) mit $(j)\eta_i$ ($j = 1, \dots, k-1$), so folgt

$$(10) \quad (j)A = (j)\eta_i \frac{d_{(k)}\eta^i}{ds} = - (k)\eta^i \frac{d_{(j)}\eta_i}{ds} = - (k)\eta^i \left[-\frac{g_{-1}\eta_i}{\sigma_{j-1}} + \frac{g_{+1}\eta_i}{\sigma_j} \right] = \frac{\delta_{kj} - 1}{\sigma_{j-1}} - \frac{\delta_{kj+1}}{\sigma_j}.$$

Also ist $(j)A = 0$ ($j = 1, \dots, k-2$), dagegen $(k-1)A = -\frac{1}{\sigma_{k-1}}$.

Durch die Normierung

$$(10') \quad (k+1)\bar{\eta}^i = \frac{(k+1)\eta^i}{\sigma_k},$$

wo $\frac{1}{\sigma_k}$ ein skalarer Normierungsfaktor ist, definieren wir den auf $(\alpha)\eta^i$ ($\alpha = 1, \dots, k$) senkrechten $k+1$ ten Einheitsvektor $(k+1)\eta^i$. Dabei ist in P_0 das Vorzeichen von σ_k^{-1} willkürlich gewählt, aber dann, durch die Vereinbarung über die *Stetigkeit des Vektors* $(k+1)\eta^i$ ($(k+1)\bar{\eta}^i$ ist stetig!) in allen anderen Punkten von C festgelegt.¹⁾ Der Skalar σ_k^{-1} ist dann längs C selbst stetig. Aus (9), (10) und (10') erhalten wir

$$(11) \quad \frac{d_{(k)}\eta^i}{ds} = -\frac{(k-1)\eta^i}{\sigma_{k-1}} + \frac{(k+1)\eta^i}{\sigma_k}.$$

Wir können also die Konstruktion bis zu einem normierten n -Bein fortsetzen, wenn wir nicht wegen Nichtdifferenzierbarkeit des zuletzt erhaltenen Vektors (hier $(k+1)\eta^i$) oder wegen des Verschwindens des letzten Normierungsfaktors $\frac{1}{\sigma_k}$ einmal zum Stillstand kommen. Da $\frac{d_{(\alpha)}\eta^i}{ds}$ durch das normierte n -Bein $(\alpha)\eta^i$ ($\alpha = 1, \dots, n$) dargestellt werden kann, ist $\frac{1}{\sigma_n} = 0$. Gelangen wir zur Konstruktion eines n -Beines $(\alpha)\eta^i$, so gelten die Relationen (8) für ($j = 1, \dots, n$) mit $\sigma_0^{-1} = \sigma_n^{-1} = 0$.

1) Vgl. die beiden vorhergehenden Anmerkungen.

Den Fall der Nichtdifferenzierbarkeit des letztgenannten Vektors wollen wir nicht weiter diskutieren, also annehmen, daß ein vorzeitiger Abbruch der Konstruktion nur infolge Verschwindens des letztgewonnenen normierenden Skalars eintritt; ist dieser σ_k^{-1} , so gilt die Relation (8) mit $\sigma_0^{-1} = \sigma_k^{-1} = 0$. Der Fall der Nichtdifferenzierbarkeit tritt übrigens sicher nicht ein, wenn ${}_{(1)}\eta^i$ mindestens n -mal stetig differenzierbar ist.

An Stelle des willkürlichen Vektors ${}_{(1)}\eta^i$ nehmen wir nun den *Tangentenvektor* ${}_{(1)}\xi^i = \frac{dx_i}{ds}$ von C und führen, von diesem ausgehend, die obige Konstruktion durch, bezeichnen aber jetzt die Normierungsfaktoren mit ϱ_α^{-1} statt mit σ_α^{-1} und die Vektoren des Beins mit ${}_{(\alpha)}\xi^i$. Man nennt ${}_{(\alpha)}\xi^i$ die α -te *Normale* (genauer *Normalenvektor*) und ϱ_α^{-1} die α -te *Krümmung* von C . Ist $\varrho_k^{-1} = 0$ die erste verschwindende Krümmung, so führt die obige Konstruktion zu einem k -Bein ${}_{(\alpha)}\xi^i$ ($\alpha = 1, \dots, k$), das als *begleitendes k -Bein* von C bezeichnet wird und zwischen dessen Vektoren die Relationen

$$(12) \quad \frac{d_{(\alpha)}\xi^i}{ds} = -\frac{(\alpha-1)\xi^i}{\varrho_{\alpha-1}} + \frac{(\alpha+1)\xi^i}{\varrho_\alpha}, \quad \varrho_0^{-1} = \varrho_k^{-1} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, k),$$

die sogenannten *Frenetformeln* bestehen. Die Zahl k ist für die Kurve C charakteristisch und kann jeden Wert von 1 bis n annehmen. Auf eine einfache Deutung von k bei Kurven im euklidischen R_n kommen wir in § 3 zu sprechen. Bemerkte sei noch, daß man das begleitende k -Bein ($k < n$) stets durch weitere $n - k$ längs C definierte Einheitsvektoren ${}_{(\alpha)}\xi^i$ ($\alpha = k + 1, \dots, n$), die untereinander und auf den ${}_{(\alpha)}\xi^i$ ($\alpha = 1, \dots, k$) senkrecht stehen, zu einem *begleitenden n -Bein* ergänzen kann.¹⁾

Wie am Schluß von III, § 1 betrachten wir das in allen Punkten des R_n definierte normierte n -Bein ${}_{(\sigma)}\mu^i$. In diesem n -Bein seien

$$(13) \quad {}_{(\alpha)}\xi^i = {}_{(\alpha\varrho)}\xi^i {}_{(\varrho)}\mu^i \quad (\alpha = 1, \dots, k, \varrho, \nu = 1, \dots, n)$$

die Darstellungen des begleitenden k -Beins von C ; die Beinkomponenten ${}_{(\alpha\varrho)}\xi^i$ erhält man aus (13) durch Überschiebung mit ${}_{(\sigma)}\mu^i$

$$(13') \quad {}_{(\alpha\sigma)}\xi^i = {}_{(\alpha)}\xi^i {}_{(\sigma)}\mu^i.$$

Aus (12) folgt wegen (III, 1, 25) und (13)

$$(14) \quad \frac{d_{(\alpha\varrho)}\xi^i}{ds} + {}_{(\alpha\sigma)}\xi^i {}_{(\sigma\varrho)}C_k \frac{d\sigma_k}{ds} = -\frac{1}{\varrho_{\alpha-1}} {}_{(\alpha-1, \varrho)}\xi^i + \frac{1}{\varrho_\alpha} {}_{(\alpha+1, \varrho)}\xi^i,$$

1) Man nehme einen beliebigen, auf ${}_{(\alpha)}\xi^i$ ($\alpha = 1, \dots, k$) normalen, stetig differenzierbaren Einheitsvektor ${}_{(k+1)}\xi^i$ und setze von ihm ausgehend die Konstruktion des n -Beins fort. Für dieses gilt dann (12) mit $\varrho_0^{-1} = \varrho_k^{-1} = \varrho_n^{-1} = 0$. Die „Krümmungen“ ϱ_α^{-1} ($\alpha = k + 1, \dots, n - 1$) sind dann für die Kurve ohne Bedeutung, da sie beliebig (stetig) gewählt werden können und nur das $n - k$ -Bein ${}_{(\alpha)}\xi^i$ ($\alpha = k + 1, \dots, n$) längs der Kurve bestimmen.

die Frenetformeln für die Beinkomponenten ${}_{(\alpha q)}\xi$ des begleitenden k -Beins von C .

Für eine Kurve C , deren k te Krümmung verschwindet, besteht nach (12) das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{ds} = (1)\xi^i \\ \frac{d({}_{(1)}\xi^i}{ds} = - \begin{Bmatrix} p & q \\ & i \end{Bmatrix} (1)\xi^p (1)\xi^q + \frac{{}_{(2)}\xi^i}{\varrho_1} \\ \dots \\ \frac{d({}_{(k)}\xi^i}{ds} = - \begin{Bmatrix} p & q \\ & i \end{Bmatrix} (k)\xi^p (1)\xi^q - \frac{{}_{(k-1)}\xi^i}{\varrho_{k-1}} \end{cases}$$

Dieses System ist von der Form

$$(15') \quad \frac{d\mu_i}{ds} = \Phi_i(s, \mu_1, \dots, \mu_l) \quad (i = 1, \dots, l)$$

und sei nun für sich allein betrachtet. Da die rechten Seiten in (15) stetige Funktionen ihrer Argumente $(s, x_i, {}_{(\alpha)}\xi^i, i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, k)$ sind, und in bezug auf die x_i und ${}_{(\alpha)}\xi^i$ stetige Ableitungen besitzen, so gibt es zu jedem System von Anfangswerten

$$(16) \quad s_0, \quad x_i^0, \quad {}_{(\alpha)}\xi^i \quad (i = 1, \dots, n, \alpha = 1, \dots, k)$$

ein eindeutig bestimmtes Lösungssystem von (15)

$$(17) \quad x_i = \tilde{x}_i(s), \quad {}_{(\alpha)}\xi^i = {}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i(s) \quad (i = 1, \dots, n, \alpha = 1, \dots, k),$$

das für $s = s_0$ die Anfangswerte (16) annimmt.

Mit \tilde{C} sei die Kurve $x_i = \tilde{x}_i(s)$ bezeichnet. Die in jedem Punkt von \tilde{C} definierten Invarianten

$$(18) \quad {}_{(\alpha\beta)}T = {}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i {}_{(\beta)}\tilde{\xi}_i \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, k)$$

genügen dem Systeme

$$\frac{d {}_{(\alpha\beta)}T}{ds} = \frac{d {}_{(\alpha\beta)}T}{ds} = \left[- \frac{{}_{(\alpha-1)}\tilde{\xi}^i}{\varrho_{\alpha-1}} + \frac{{}_{(\alpha+1)}\tilde{\xi}^i}{\varrho_\alpha} \right] {}_{(\beta)}\tilde{\xi}_i + \left[- \frac{{}_{(\beta-1)}\tilde{\xi}_i}{\varrho_{\beta-1}} + \frac{{}_{(\beta+1)}\tilde{\xi}_i}{\varrho_\beta} \right] {}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i$$

oder

$$(19) \quad \frac{d {}_{(\alpha\beta)}T}{ds} = - \frac{{}_{(\alpha-1)\beta}T}{\varrho_{\alpha-1}} + \frac{{}_{(\alpha+1)\beta}T}{\varrho_\alpha} - \frac{{}_{(\alpha\beta-1)}T}{\varrho_{\beta-1}} + \frac{{}_{(\alpha\beta+1)}T}{\varrho_\beta}.$$

Auch (19) ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Normalform (15'), und ebenso wie bei (12) sind auch hier die Voraussetzungen für die Existenz und Eindeutigkeit eines Lösungssystems bei vorgegebenen Anfangswerten erfüllt. Da ${}_{(\alpha\beta)}T = \delta_{\alpha\beta}$ ein Lösungssystem von (19) ist, so ist es das einzige, das für einen Fixpunkt $s = s_0$ die Anfangswerte $\delta_{\alpha\beta}$ annimmt. Wählt man daher in s_0 die ${}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i$ ($\alpha = 1, \dots, k$), als normiertes k -Bein, so behält ${}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i$ ($\alpha = 1, \dots, k$) längs der ganzen Kurve \tilde{C} diese Eigenschaft und ist dann

wegen (15) das begleitende k -Bein von \tilde{C} , deren Bogenlänge s ist. \tilde{C} fällt mit C zusammen, wenn in einem Punkte (s_0) die Anfangslage $\tilde{x}_i^0 = x_i^0$, ${}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i = {}_{(\alpha)}\xi^i$ ($\alpha = 1, \dots, k$) gewählt ist. Denn beide Kurven ($x_i, {}_{(\alpha)}\xi^i$) und ($\tilde{x}_i, {}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i$) erfüllen dann bei gleichen Anfangsbedingungen das System (15). Wir wiederholen, daß durch die Anfangslage des begleitenden k -Beins (16) und durch die Angabe von $k - 1$ stetigen Funktionen ϱ_l^{-1} ($l = 1, \dots, k - 1$) der Bogenlänge eine Kurve C im RIEMANNschen R_n eindeutig gegeben ist, deren $k - 1$ Krümmungen die vorgegebenen Funktionen ϱ_l^{-1} sind und deren k te Krümmung verschwindet. Dabei muß $k \leq n$ sein.

§2. Der euklidische R_n . Rechtwinklige kartesische Koordinaten.

Wir werden später den euklidischen R_n durch geometrische Eigenschaften charakterisieren; hier gehen wir zunächst von der bekannten Tatsache aus, daß der euklidische R_n am einfachsten auf rechtwinklige kartesische oder kurz rechtwinklige Koordinaten bezogen wird. Dabei wird ein Punkt O zum Koordinatenursprung gewählt und durch ihn n zu je zweien aufeinander senkrechte $n - 1$ dimensionale Hyperebenen E_{n-1} konstruiert. Die rechtwinkligen Koordinaten x_i eines Punktes P sind dann die n Normalabstände des Punktes P von diesen n Hyperebenen E_{n-1} .

In rechtwinkligen Koordinaten hat der Maßtensor g_{ik} die besonders einfache Gestalt

$$(1) \quad g_{ik} = \delta_{ik} = \delta_i^k.$$

Aus $\lambda_i = g_{ik}\lambda^k = \delta_i^k\lambda^k = \lambda^i$ folgt, daß in einem auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen R_n kein Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren besteht. Entsprechendes gilt natürlich auch von Tensoren. Zwischen zwei rechtwinkligen Koordinatensystemen x_i und \tilde{x}_i besteht eine Transformation der Gestalt

$$(2) \quad \tilde{x}_i = a_{ik}x_k + b_i$$

mit konstanten a_{ik} , b_i , wobei die Matrix

$$(2') \quad \|a_{ik}\|$$

orthogonal ist. Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet eine Gruppe, die erweiterte Bewegungsgruppe des R_n ; in ihr ist die Untergruppe der Transformationen (2), (2') enthalten, deren Matrizen die Determinante $|a_{ik}| = +1$ haben, und die wir Bewegungsgruppe (im engeren Sinn) nennen. Wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, verstehen wir im folgenden unter einer Bewegung eine Transformation (2) mit beliebigem Vorzeichen der Determinante $|a_{ik}|$ und unter der Bewegungsgruppe schlechthin die erweiterte Bewegungsgruppe.

Wir wollen nun kurz beweisen, daß zwischen zwei rechtwinkligen Koordinatensystemen in der Tat eine Transformation (2), (2') besteht. Setzen wir $\tilde{x}_i - b_i = \bar{x}_i$, so ist die Transformation (2) das Resultat der Aufeinanderfolge der „Parallelverschiebung“

$$(3) \quad \tilde{x}_i = \bar{x}_i + b_i$$

und der Transformation

$$(3') \quad \bar{x}_i = a_{ik} x_k,$$

wo $\|a_{ik}\|$ eine orthogonale Matrix ist. Die n Gleichungen

$$(4) \quad a_{ik} x_k = 0$$

stellen n (für $i = 1, \dots, n$) zu je zweien aufeinander senkrechte E_{n-1} durch den Koordinatenursprung dar. Ist P der betrachtete Punkt (x_1, \dots, x_n) , so ist \bar{x}_i der in der Richtung der Normalen ${}_{(i)}\lambda_k = a_{ik}$ der i ten E_{n-1} gemessene Abstand des Punktes P von dieser E_{n-1} . Um dies zu erkennen, bezeichne man mit $\bar{P}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ die Projektion von $P(x_1, \dots, x_n)$ in diese E_{n-1} . Dann gilt

$$(5) \quad a_{ij} \xi_j = 0$$

und

$$(6) \quad x_j = \xi_j + p a_{ij},$$

wo $\pm p$ die Entfernung des Punktes P von dieser E_{n-1} ist, je nachdem P auf der durch $a_{ij} = {}_{(i)}\lambda_j$ markierten „positiven Seite“ der E_{n-1} liegt oder nicht. Überschiebt man (6) mit a_{ij} , so folgt wegen $a_{ij} a_{il} = \delta_{il}$

$$(7) \quad \bar{x}_i = a_{il} x_l = a_{il} \xi_l + p \delta_{il}.$$

Für $i = l$ gilt wegen (5)

$$(8) \quad \bar{x}_i = p.$$

Somit sind die \bar{x}_i und, wie ohne weiteres klar ist, auch die \tilde{x}_i rechtwinklige Koordinaten.

Da umgekehrt n im Ursprung zu je zweien senkrechte E_{n-1} im rechtwinkligen Systeme x_i durch Normierung der Normalvektoren $a_{ik} = {}_{(i)}\lambda_k$ in die Form (4) gebracht werden können und dann $a_{ik} x_k$ der Abstand des Punktes x_j von der i ten dieser E_{n-1} ist, so ist, wie behauptet, (2) und (2') das allgemeinste Transformationsgesetz zwischen zwei rechtwinkligen Koordinatensystemen.

In einem auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen euklidischen R_n hat der Maßtensor g_{ik} die Form (1). Umgekehrt charakterisiert diese Form des Maßtensors die rechtwinkligen Koordinaten im euklidischen R_n .

Wir wollen, um dies zu zeigen, die Transformation

$$(9) \quad \bar{x}_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right| \neq 0$$

untersuchen, die von einem Koordinatensystem \bar{x}_i mit $\bar{g}_{ik} = \delta_{ik}$ zu einem zweiten solchen x_i mit $g_{ik} = \delta_{ik}$ führt. Sei λ^i ein beliebiger kontravarianter Vektor in einem Punkte P des R_n , so gilt, falls

$$(10) \quad \bar{\lambda}^i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \lambda^k$$

seine Komponenten im Systeme \bar{x}_i sind,

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n (\lambda^i)^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{\lambda}^i)^2.$$

Daraus folgt

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_k} = \delta_{ik}.$$

Wenn wir die Funktionen φ_α als zweimal stetig differenzierbar annehmen, erhalten wir aus (12)

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} = 0$$

und durch Indizesvertauschung

$$(13') \quad \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} = 0$$

sowie

$$(13'') \quad \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_k} = 0.$$

Addiert man die Relationen (13) und (13') und subtrahiert (13''), so ergibt sich

$$(14) \quad \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} = 0,$$

woraus wegen $\left| \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} \right| \neq 0$

$$(15) \quad \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_k \partial x_j} = 0,$$

also

$$(16) \quad \varphi_\alpha = a_{\alpha k} x_k + b_\alpha,$$

mit konstanten Koeffizienten $a_{\alpha k}$, b_α folgt. Es ist dann $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} = a_{\alpha i}$, und aus (12) wird

$$(17) \quad a_{\alpha i} a_{\alpha k} = \delta_{ik},$$

d. h. die Transformation (16) die von einem Koordinatensystem x_i mit $g_{ik} = \delta_{ik}$ zu einem zweiten \bar{x}_i mit $\bar{g}_{ik} = \delta_{ik}$ führt, hat die Form (2), (2') und ist also eine Bewegung. Ist das erste Koordinatensystem, was immer angenommen werden kann, rechtwinklig, so gilt dasselbe für das System \bar{x}_i , w. z. b. w.¹⁾.

1) Wir hätten den Beweis direkt geben können, wenn uns das Problem der Ebenen in einem RIEMANNschen R_n geläufig wäre. Dieses wird aber erst an späterer Stelle behandelt.

Wird nun im euklidischen R_n ein geometrisches Gebilde, z. B. ein Dreieck betrachtet, so bezieht man es zweckmäßig auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, indem man im Beispiel des Dreieckes die Lage der Eckpunkte $P^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) im gewählten System durch die Koordinaten $x_i^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) angibt. Jede geometrische Größe¹⁾ des Gebildes (im Dreieck: Seiten, Winkel usw.) ist dann eine Funktion der Bestimmungsstücke mit der Eigenschaft, *der Form und dem numerischen Werte nach* unverändert zu bleiben, wenn man von einem kartesischen Koordinatensystem zu irgendeinem anderen solchen übergeht. Dies bedeutet aber, daß jede geometrische Größe durch eine Invariante bezüglich *der Bewegungsgruppe (2) des euklidischen R_n* dargestellt wird. Eine fundamentale Tatsache, die meist nur ungenügend betont wird, ist diese Invarianz der Form.²⁾

Wir haben damit KLEINS gruppentheoretische Auffassung skizziert, die die euklidische Geometrie als die Invariantentheorie der Bewegungsgruppe ansieht, in dem Sinn, daß jede geometrische Größe eine Invariante bezüglich der Transformationen der Bewegungsgruppe ist und umgekehrt. Die Begriffe: „Geometrische Größe“ und „Invariante bezüglich der Bewegungsgruppe“ sind nach KLEIN identisch.³⁾

Wenn man statt (2) die allgemeinere Gruppe

$$(18) \quad \bar{x}_i = a_{ik} x_k + b_i, \quad |a_{ik}| \neq 0$$

(a_{ik}, b_i konstant) betrachtet, die die Bewegungsgruppe als Untergruppe enthält, so ist die Invariantentheorie dieser Gruppe wieder eine KLEINSche Gruppengeometrie, die sogenannte *affine Geometrie*. Jede affin geometrische Größe ist eine Invariante bezüglich der Gruppe (18), also auch bezüglich der Untergruppe (2) von (18), d. h. eine euklidische Größe. Die affine Gruppe (18) wieder ist eine Untergruppe der projektiven Gruppe

$$(19) \quad \bar{x}_i = \frac{a_{ik} x_k + b_i}{a_j x_j + b}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & b \end{vmatrix} \neq 0,$$

deren Invariantentheorie die *projektive Geometrie* ist.

1) Geometrische Größe im eigentlichen Sinn des Wortes, also Zahlgröße.

2) Treibt man euklidische Geometrie in analytischer Behandlung, so legt man zumeist rechtwinklige Koordinaten zugrunde. Die geometrischen Größen, zu denen man auf Grund elementargeometrischer Methoden gelangt, haben dann die charakteristische Eigenart, durch Formeln ausgedrückt zu werden, die für alle rechtwinklige Koordinatensysteme der Form nach gleich sind. Diese auffallende Tatsache, die erst durch die RIEMANNsche Anschauungsweise erklärt wird, macht die vom speziellen Koordinatensystem unabhängige analytische Behandlung der Geometrie überhaupt erst möglich.

3) Es wird dabei keineswegs behauptet, daß sich die Geometrie im Aufstellen von

Wir wollen nun noch den Namen *Bewegung* erklären. Ist ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem gegeben, so können wir die Transformation (2) auch als *Punkttransformation* des euklidischen R_n auffassen, d. h. die x_i und \tilde{x}_i als Koordinaten zweier Punkte in unserem festen Koordinatensystem deuten. Jedem Punkt $P(x_1, \dots, x_n)$ wird ein Punkt (Bildpunkt) $\tilde{P}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ so zugeordnet, daß jeder Punkt \tilde{P} des R_n Bildpunkt eines bestimmten Punktes P wird. Einem geometrischen Gebilde G wird auf diese Weise ein geometrisches Gebilde \tilde{G} zugeordnet. Ist nun φ eine geometrische Größe (Länge, Winkel, Volumen oder dergleichen) des Gebildes G , so wird sie durch eine bestimmte Funktion der Koordinaten von G und eventuell auch deren Ableitungen in der Form

$$(20) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n; \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \dots)$$

dargestellt.¹⁾ Dabei ist φ eine Invariante bezüglich der Bewegungsgruppe (2), so daß

$$(21) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n; \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \dots) = \varphi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n; \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial y_1}, \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial y_1}, \dots)$$

gilt, wo

$$(22) \quad \tilde{x}_i = a_{ik} x_k + b_i$$

eine Transformation der Gruppe (2), (2') ist. Faßt man (22), wie eben ausgeführt, als Punkttransformation auf, die dem Gebilde G das Gebilde \tilde{G} zuordnet, so steht rechter Hand in (21) der Ausdruck für die der geometrischen Größe φ von G entsprechende Größe $\tilde{\varphi}$ von \tilde{G} . Dann aber besagt (21), daß die entsprechenden geometrischen Größen der Gebilde G und \tilde{G} gleich sind, d. h. diese Gebilde sind *euklidisch kongruent*, wenn wir als euklidisch kongruent zwei Gebilde des euklidischen R_n bezeichnen, die einander ein-eindeutig so zugeordnet werden können, daß entsprechende Größen gleiche numerische Werte haben.²⁾

Durch eine Bewegung geht also jedes geometrische Gebilde des R_n in ein kongruentes über.³⁾

Ein System unabhängiger geometrischer Größen eines Gebildes G heißt ein *vollständiges Invariantensystem*, wenn es das Gebilde bis auf seine Lage im Raum, d. h. bis auf eine Transformation der Bewegungsgruppe (also bis auf Kongruenz) festlegt. Für ein Dreieck bilden z. B. die Seitenlängen ein solches

Invarianten gegebener Gebilde *erschöpft*. Zu dieser sehr wichtigen Aufgabe tritt noch die, die Relationen herzustellen, die zwischen den Invarianten der gegebenen Gebilde bestehen. Ein geometrischer Satz ist ja nie etwas anderes als ein System von solchen Relationen.

1) Die analytische Form dieser Funktion ist von den Parametern y_1, \dots des Gebildes G unabhängig, solange dieselben nicht speziell gewählt sind.

2) Entsprechend definiert man *affin kongruent* und *projektiv kongruent*.

3) Man überlege die Umkehrung dieser Behauptung!

System (Kongruenzsatz). Der Nachweis der Vollständigkeit für ein Invariantensystem eines Gebildes G wird also ein Kongruenzsatz über dieses Gebilde sein. Jede weitere geometrische Größe wird eine Funktion der Invarianten des vollständigen Systems sein, die man oft als *natürliche Koordinaten* des betreffenden Gebildes bezeichnet.

Für euklidische Räume und allgemeiner auch für die Räume konstanter Krümmung (VI, § 5) hat die RIEMANNsche Betrachtungsweise KLEINS gruppentheoretische Auffassung der Geometrie zur Folge. Wir wollen uns das genauer überlegen. Eine geometrische Größe φ eines geometrischen Gebildes G eines RIEMANNschen R_n wird durch eine Funktion

$$(23) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \dots, g_{pq}(x), \dots)$$

der Koordinaten des Gebildes G (d. h. durch die Koordinaten der Punkte von G) und ihrer Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung sowie des Maßtensors g_{ik} und seiner Ableitungen dargestellt, die sich in bezug auf die Transformationen der Koordinaten invariant verhält, also eine Simultaninvariante des Gebildes G und des Maßtensors g_{ik} ist:

$$(24) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \dots, g_{pq}(x), \dots) = \varphi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{y}_1}, \dots, \tilde{g}_{pq}(\tilde{x}), \dots).$$

Der euklidische R_n ist nun als RIEMANNscher R_n dadurch charakterisiert, daß für gewisse Koordinatensysteme (rechtwinklig kartesische) der Maßtensor g_{ik} die spezielle Gestalt $g_{ik} = \delta_{ik}$ hat. Von einem rechtwinkligen System zu jedem anderen dieser Art führt eine Transformation der Gruppe (22). Beschränken wir uns auf rechtwinklige Koordinaten im euklidischen R_n , so wird der Ausdruck einer geometrischen Größe φ die spezielle Gestalt

$$(25) \quad \psi(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \dots) = \psi(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \dots, \delta_{pq} \dots)$$

haben, und an Stelle von (24) tritt für eine Bewegung (22)

$$(26) \quad \psi(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \dots) = \psi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{y}_1}, \dots).$$

Wir fassen nun die in (26) oder, was dasselbe ist, in

$$(27) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \dots, \delta_{pq}, \dots) = \varphi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{y}_1}, \dots, \delta_{pq}, \dots)$$

eingehenden Größen als entsprechende Größen zweier kongruenter geometrischer Gebilde G und \tilde{G} des euklidischen Raumes auf. Beim Übergang zu allgemeinen Koordinaten \tilde{x}_i wird (27) zu

$$(28) \quad \varphi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{y}_1}, \dots, \tilde{g}_{pq}(\tilde{x}), \dots) = \varphi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{y}_1}, \dots, \tilde{g}_{pq}(\tilde{x}), \dots);$$

da die linke Seite immer noch diese Größe von G , die rechte die entsprechende Größe von \tilde{G} ausdrückt, gilt ganz allgemein zwischen entsprechenden Größen kongruenter Gebilde in euklidischen Räumen eine Relation von der Form (28).

Fassen wir $\varphi\left(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial y_1}, \dots, \bar{g}_{pq}(\bar{x}), \dots\right)$ als Funktion der \bar{x}_i und und ihrer Ableitungen auf, sehen also von der Abhängigkeit von den im R_n festgegebenen \bar{g}_{pq} ab, so können wir

$$\varphi\left(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial y_1}, \dots, \bar{g}_{pq}(\bar{x}), \dots\right) = \chi\left(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial y_1}, \dots\right)$$

schreiben. In diesem Sinn erscheinen jetzt wegen (28) die geometrischen Größen Riemannscher Auffassung als Invarianten gegenüber den Transformationen

$$(29) \quad \tilde{x}_i = \tilde{x}_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

der Bewegungsgruppe.¹⁾

Die analytische Gestalt der Bewegungstransformationen (29) in allgemeinen Koordinaten ist natürlich nicht (2), (2'), sondern geht aus dieser speziellen, nur für rechtwinklige kartesische Koordinaten gültigen Form durch eine Transformation im Sinne der Gruppentheorie hervor. Sei nämlich

$$(30) \quad \bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n), \quad x_i = x_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

jene Koordinatentransformation, die das rechtwinklige System x_i in das allgemeine \bar{x}_i überführt. Wir bezeichnen sie symbolisch mit

$$(31) \quad \bar{x}_i = S(x_i), \quad x_i = S^{-1}(\bar{x}_i),$$

und ebenso bedeute

$$(32) \quad \bar{U}:: = S(U::), \quad U:: = S^{-1}(\bar{U}::)$$

die Transformation eines Tensors $U::$ beim Übergang (31) vom System x_i zum System \bar{x}_i . So ist z. B.

$$(33) \quad \bar{g}_{ik}(\bar{x}) = S(g_{ik}(x)),$$

die symbolische Schreibweise für die Gleichungen

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n), \quad \bar{g}_{ik} = g_{pq} \frac{\partial x_p}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_q}{\partial \bar{x}_k}.$$

Zwei kongruente Gebilde G und \tilde{G} sind im System x_i durch eine Relation

$$(34) \quad \tilde{G} = T(G)$$

verbunden, wobei T eine Bewegung (2) ist. Im System \bar{x}_i sei das Gebilde G mit \bar{G} und \tilde{G} mit $\tilde{\bar{G}}$ bezeichnet. Dann gilt symbolisch

$$(35) \quad \bar{G} = S(G) \quad \text{und} \quad \tilde{\bar{G}} = S(\tilde{G}).$$

1) Beschränkt man sich auf rechtwinklige Koordinaten, so folgt dies bereits aus (26).

Aus (34) und (35) folgt $\tilde{G} = S(T(G))$, und da $G = S^{-1}(\bar{G})$ ist, verknüpft die Transformation

$$(36) \quad \tilde{G} = S T S^{-1}(\bar{G}) = \bar{T}(\bar{G})$$

\tilde{G} mit \bar{G} . Nimmt man für G einen Punkt des R_n , so sieht man, daß die Bewegungstransformationen \bar{T} des euklidischen Raumes im System $\bar{x}_i = S(x_i)$ aus den mit T bezeichneten Bewegungstransformationen (2) durch Transformation mit S hervorgehen, d. h. es ist

$$\bar{T} = S T S^{-1}.$$

Wir definieren nun den Begriff „Bewegungsgruppe“ für den allgemeinen RIEMANNschen R_n . Gibt es in einem RIEMANNschen R_n Punkttransformationen $\tilde{x}_i = T(x_i)$, die geometrische Gebilde im Sinn von (28) „kongruent verpflanzen“, dann bilden sie, wie man sich ohne weiteres überlegt, in ihrer Gesamtheit eine Gruppe, die wir die *Bewegungsgruppe des betrachteten Riemannschen R_n* nennen wollen.

Aus (28) entnimmt man wieder, daß jede geometrische Größe sich als Invariante der Bewegungsgruppe ansehen läßt.

Ist nun

$$(37) \quad \tilde{x}_i = T(x_i)$$

eine Punkttransformation, so gilt, wenn wir sie für den Augenblick als Koordinatentransformation deuten,

$$(38) \quad \tilde{g}_{ik}(\tilde{x}) = T(g_{ik}(x))$$

und nach der Definition der geometrischen Größen als Invarianten gegenüber Koordinatentransformationen

$$(39) \quad \varphi\left(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial y_1}, \dots, \tilde{g}_{pq}(\tilde{x}), \dots\right) = \varphi\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \dots, g_{pq}(x), \dots\right).$$

Genügt nun die Transformation (37) der Relation

$$(40) \quad T(g_{ik}(x)) = g_{ik}(\tilde{x}),$$

so geht (39) über in (28), d. h. die Punkttransformation T (37) ist eine Bewegung.

Wir zeigen noch, daß (40) für Bewegungen auch *notwendig und damit charakteristisch* ist. Zum Beweise betrachten wir das innere Produkt zweier willkürlicher Vektoren λ^i und μ^i eines Punktes. Ist dann (37) eine Bewegung und setzen wir

$$T(g_{ik}(x)) = \tilde{g}_{ik}(\tilde{x}), \quad T(\lambda^i(x)) = \tilde{\lambda}^i(\tilde{x}), \quad T(\mu^i(x)) = \tilde{\mu}^i(\tilde{x}),$$

so ist nach den allgemeinen Regeln der Tensorrechnung

$$(41) \quad g_{ik}(x) \lambda^i(x) \mu^k(x) = \tilde{g}_{ik}(\tilde{x}) \tilde{\lambda}^i(\tilde{x}) \tilde{\mu}^k(\tilde{x});$$

aber da es sich um eine Kongruenz handelt, gilt auch

$$(42) \quad g_{ik}(x) \lambda^i(x) \mu^k(x) = g_{ik}(\tilde{x}) \tilde{\lambda}^i(\tilde{x}) \tilde{\mu}^k(\tilde{x}).$$

Wegen der Willkür der Vektoren $\tilde{\lambda}^i$ und $\tilde{\mu}^i$ folgt aus (41) und (42)

$$(43) \quad \tilde{g}_{ik}(\tilde{x}) = T(g_{ik}(x)) = g_{ik}(\tilde{x}),$$

w. z. b. w.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß Punkttransformationen tensorerhaltend sind, d. h. ist in einem Punkt x_i ein Tensor

$$(44) \quad x_i, \quad U..$$

definiert, so führt ihn jede Punkttransformation $\tilde{x}_i = V(x_i)$ — wobei sich die analytische Gestalt von V mit dem Koordinatensystem ändert — in einen Tensor gleicher Art

$$(45) \quad \tilde{x}_i, \quad \tilde{U}.. = V(U..)$$

über. Ist nämlich $\tilde{x}_i = S(x_i)$ eine Koordinatentransformation, so hat im neuen System \tilde{x}_i die Punkttransformation V die analytische Gestalt

$$\bar{V} = S V S^{-1}.$$

Nun sind aber die Komponenten $\bar{U}..$ des Tensors (44) im System \tilde{x}_i symbolisch dargestellt durch

$$(46) \quad \bar{U}.. = S(U..).$$

Es gilt demnach

$$(47) \quad \tilde{U}.. = \bar{V}(\bar{U}..) = \bar{V}S(U..) = SV(U..) = S(\tilde{U}..),$$

womit der Tensorcharakter von $\tilde{U}..$ nachgewiesen ist.

§ 3. Kurven im euklidischen R_n .

Wenn wir im euklidischen R_n rechtwinklige Koordinaten verwenden, so sind die $g_{ik} = \delta_{ik}$ konstant und es verschwinden alle Christoffelklammern. Somit ist

$$(1) \quad \frac{\partial T..}{\partial x_j} = \frac{dT..}{dx_j}$$

für jeden Tensor $T..$. Wegen

$$(2) \quad \lambda_i = g_{ik} \lambda^k = \delta_{ik} \lambda^k = \lambda^i$$

fällt jede Unterscheidung von kovarianten und kontravarianten Indizes bei Tensoren fort. Die Bewegung

$$(3) \quad \tilde{x}_i = a_{ik} x_k + b_i,$$

mit orthogonaler Matrix $\|a_{ik}\|$ und konstanten Koeffizienten a_{ik} und b_i ist

dann eine Punkttransformation, bei der die geometrischen Größen der bewegten Gebilde erhalten bleiben.

In § 1 wurde gezeigt, daß eine Kurve C

$$(4) \quad x_i = x_i(s),$$

die wir auf die Bogenlänge als Parameter beziehen, durch die Anfangslage des begleitenden n -Beins¹⁾

$$(5) \quad x_i^0, \quad {}_{(\alpha)}\xi_i^0; \quad {}_{(\alpha)}\xi_i^0 {}_{(\beta)}\xi_i^0 = \delta_{\alpha\beta}$$

und durch die Angabe der Krümmungen

$$(6) \quad \frac{1}{\varrho_\alpha} = \varphi_\alpha(s),$$

wo die $\varphi_\alpha(s)$ stetige Funktionen der Bogenlänge sind, vollständig bestimmt ist. Ist nun

$$(7) \quad \bar{x}_i^0, \quad {}_{(\alpha)}\bar{\xi}_i^0$$

ein zweites normiertes n -Bein (${}_{(\alpha)}\bar{\xi}_i^0 {}_{(\beta)}\bar{\xi}_i^0 = \delta_{\alpha\beta}$), so existiert genau eine Bewegung (3), welche die zwei n -Beine (5) und (7) ineinander überführt. Aus

$$(8) \quad \bar{x}_i^0 = a_{ik} x_k^0 + b_i$$

und

$$(8') \quad {}_{(\alpha)}\bar{\xi}_i^0 = a_{ik} {}_{(\alpha)}\xi_k^i$$

folgt nämlich, wenn (8') mit ${}_{(\alpha)}\xi_j^0$ multipliziert wird,

$$(9) \quad a_{ij} = {}_{(\alpha)}\bar{\xi}_i^0 {}_{(\alpha)}\xi_j^0,$$

worauf dann die b_i aus (8) zu berechnen sind. Die Matrix der a_{ij} (9) ist wegen

$$(10) \quad a_{ij} a_{kj} = {}_{(\alpha)}\bar{\xi}_i^0 {}_{(\beta)}\bar{\xi}_k^0 {}_{(\alpha)}\xi_j^0 {}_{(\beta)}\xi_j^0 = {}_{(\alpha)}\bar{\xi}_i^0 {}_{(\alpha)}\bar{\xi}_k^0 = \delta_{ik}$$

orthogonal.

Die so bestimmte Bewegung (3) transformiert die Kurve C in eine Kurve \bar{C} , deren begleitendes n -Bein die Anfangslage (7) hat und die in entsprechenden Punkten s die gleichen Krümmungen $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ wie die Kurve C hat. Da aber durch diese Eigenschaft eine Kurve bestimmt wird, so folgt daraus, daß alle Kurven mit gleichen Krümmungen euklidisch kongruent sind, d. h. durch Bewegungen ineinander übergeführt werden können.

Diese Tatsache folgt auch direkt aus den FRENETSchen Formeln. In rechtwinkligen Koordinaten lauten diese

1) Wir denken uns im Fall $\varrho_k^{-1} = 0$ ($k < n$) das begleitende k -Bein in der in § 1 angegebenen Weise zu einem begleitenden n -Bein ergänzt.

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{ds} = (1)\xi_i \\ \frac{d_{(\alpha)}\xi_i}{ds} = -\frac{(\alpha-1)\xi_i}{\varrho_{\alpha-1}} + \frac{(\alpha+1)\xi_i}{\varrho_{\alpha}}, \quad \frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\varrho_n} = 0. \end{array} \right.$$

Wenn es zu einer Kurve $x_i = x_i(s)$ ein System von n Einheitsvektoren gibt, das den Gleichungen (11) genügt, so ist s die Bogenlänge dieser Kurve und die n Einheitsvektoren sind ihr begleitendes n -Bein. In der Tat folgt aus

$$(12) \quad \frac{dx_i}{ds} = (1)\xi_i$$

und $(1)\xi_i(1)\xi_i = 1$, daß $(1)\xi_i$ die Kurventangente und s die Bogenlänge von C ist. Aus

$$(13) \quad \frac{d_{(1)}\xi_i}{ds} = \frac{(2)\xi_i}{\varrho_1}$$

und $(2)\xi_i(2)\xi_i = 1$ folgt weiter, daß $(2)\xi_i$ die erste Normale und $\frac{1}{\varrho_1}$ die erste Krümmung von C ist, womit auch die Orthogonalität der Vektoren $(1)\xi_i$ und $(2)\xi_i$ gezeigt ist. Aus

$$(14) \quad \frac{d_{(2)}\xi_i}{ds} = -\frac{(1)\xi_i}{\varrho_1} + \frac{(3)\xi_i}{\varrho_2}$$

und $(3)\xi_i(3)\xi_i = 1$ folgt dann weiter, daß $(3)\xi_i$ die zweite Normale und $\frac{1}{\varrho_2}$ die zweite Krümmung von C ist usw.

Durch die Transformation (3) wird die Kurve C in die neue Lage \bar{C} bewegt. Setzen wir

$$(15) \quad (a)\bar{\xi}_i = a_{ik}(a)\xi_k,$$

so folgt durch Überschiebung der Gleichungen des Systems (11) mit a_{ij}

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{x}_i}{ds} = (1)\bar{\xi}_i \\ \frac{d_{(a)}\bar{\xi}_i}{ds} = -\frac{(\alpha-1)\bar{\xi}_i}{\varrho_{\alpha-1}} + \frac{(\alpha+1)\bar{\xi}_i}{\varrho_{\alpha}}, \quad \frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\varrho_n} = 0. \end{array} \right.$$

Nun gilt $(a)\bar{\xi}_i(a)\bar{\xi}_i = 1$ (über α nicht summiert), d. h. die in (16) auftretenden Vektoren $(a)\bar{\xi}_i$ sind Einheitsvektoren und bilden also das begleitende n -Bein der Kurve \bar{C} , deren Krümmungen $\frac{1}{\varrho_{\alpha}}$ somit gleich den Krümmungen der Kurve C sind. Da wir nun die Bewegung (3) immer so bestimmen können, daß die Anfangslage ($s = 0$) des begleitenden n -Beins von \bar{C} irgendein vorgegebenes normiertes n -Bein ist, so haben wir wieder das Resultat, daß alle Kurven mit gleichen Krümmungen (in entsprechenden, durch gleiche Werte der Bogenlänge gegebenen Punkten) *kongruent* sind, d. h. durch Bewegungen (3) ineinander übergeführt werden können.

Die Bogenlänge und die Krümmungen (als Funktionen der Bogenlänge) sind ein vollständiges Invariantensystem der Kurve; man spricht auch oft von den „natürlichen Koordinaten“, wenn man diesen Sachverhalt kurz bezeichnen will.

Wir geben zum Schluß noch einige Folgerungen aus den FRENETSchen Formeln. Betrachten wir eine Kurve C , bei der $\frac{1}{\varrho_t} \neq 0$ für $t = 1, \dots, r-1$, dagegen $\frac{1}{\varrho_r} = 0$ ist. Diese Kurve $x_i = x_i(s)$ sei $r+1$ mal stetig differenzierbar.¹⁾ Dann gilt für $k \leq r$

$$(17) \quad (k)\xi_i = \sum_{l=1}^k (k)A_{(l)} \frac{d^l x_i}{ds^l},$$

mit skalaren, $r-k+1$ mal stetig differenzierbaren $(k)A_{(l)}$, wobei

$$(17') \quad (k)A_{(k)} = \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{k-1}, \quad (1)A_{(1)} = 1$$

ist. Die Darstellung gilt sicher für $k=1$. Sie sei nun bis $k \leq h < r$ bewiesen. Dann gilt

$$(18) \quad (h+1)\xi_i = \varrho_h \left(\frac{(h-1)\xi_i}{\varrho_{h-1}} + \frac{d(h)\xi_i}{ds} \right) = \sum_{l=1}^{h+1} (h+1)A_{(l)} \frac{d^l x_i}{ds^l}$$

mit $r-h$ mal stetig differenzierbaren $(h+1)A_{(l)}$ und mit

$$(18') \quad (h+1)A_{(h+1)} = \varrho_h (h)A_{(h)} = \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_h.$$

Ist die Formel (17) für ein $k < r$ richtig, so gilt sie also auch für $k+1$ und ist also, da sie für $k=1$ gilt, für alle $k \leq r$ bewiesen. Aus $\frac{1}{\varrho_r} = 0$ und

$$(19) \quad \frac{d(r)\xi_i}{ds} = \frac{(r-1)\xi_i}{\varrho_{r-1}}$$

folgt dann

$$(20) \quad \frac{d}{ds} \left[\sum_{l=1}^r (r)A_{(l)} \frac{d^l x_i}{ds^l} \right] = \sum_{l=1}^{r-1} \frac{(r-1)A_{(l)}}{\varrho_{r-1}} \frac{d^l x_i}{ds^l}.$$

Da $(r)A_{(r)} = \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{r-1}$ endlich und von Null verschieden ist, kann man nach (20) die $\frac{d^{r+1} x_i}{ds^{r+1}}$ linear durch die $\frac{d^\alpha x_i}{ds^\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, r$) ausdrücken. Ist also $\frac{1}{\varrho_t} \neq 0$ für $t < r$, und $\frac{1}{\varrho_r} = 0$, so ist der Rang der Matrix

$$(21) \quad \left\| \frac{d x_i}{ds} \frac{d^2 x_i}{ds^2} \dots \frac{d^r x_i}{ds^r} \frac{d^{r+1} x_i}{ds^{r+1}} \right\|$$

1) Wie man aus (11) durch Rekursion schließt, sind dann die $(\alpha+1)\xi_i$ und ϱ_α gerade $r-\alpha$ mal stetig differenzierbar.

jedenfalls kleiner als $r + 1$. Den für $k \leq r$ definierten normierten FLÜCKERSCHEN Tensor

$$(22) \quad ({}^{(k)}\pi_{ij} \dots l) = \begin{vmatrix} (1)\xi_i & (1)\xi_j & \dots & (1)\xi_l \\ (2)\xi_i & (2)\xi_j & \dots & (2)\xi_l \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (k)\xi_i & (k)\xi_j & \dots & (k)\xi_l \end{vmatrix}$$

kann man nach (17) schreiben

$$(23) \quad ({}^{(k)}\pi_{ij} \dots l) = \begin{vmatrix} \frac{dx_i}{ds} & \frac{dx_j}{ds} & \dots & \frac{dx_l}{ds} \\ \frac{d^2x_i}{ds^2} & \frac{d^2x_j}{ds^2} & \dots & \frac{d^2x_l}{ds^2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{d^kx_i}{ds^k} & \frac{d^kx_j}{ds^k} & \dots & \frac{d^kx_l}{ds^k} \end{vmatrix} Q_1^{k-1} Q_2^{k-2} \dots Q_{k-2}^2 Q_{k-1}.$$

Nun gilt

$$(24) \quad \left\| \begin{vmatrix} (1)\xi_1 & (1)\xi_2 & \dots & (1)\xi_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (k)\xi_1 & (k)\xi_2 & \dots & (k)\xi_n \end{vmatrix} \right\|^2 = 1,$$

andererseits ist dieses Matrizenquadrat gleich

$$(24') \quad \sum_{(ij \dots l)} ({}^{(k)}\pi_{ij} \dots l)^2,$$

woraus dann

$$(25) \quad \frac{1}{(Q_1^{k-1} Q_2^{k-2} \dots Q_{k-1})^2} = \frac{\sum_{(ij \dots l)} \left| \begin{vmatrix} dx_i & dx_j & \dots & dx_l \\ d^2x_i & d^2x_j & \dots & d^2x_l \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ d^kx_i & d^kx_j & \dots & d^kx_l \end{vmatrix} \right|^2}{ds^{k(k+1)}}$$

folgt. In (25) wird rechts über alle Kombinationen i, j, \dots, l der n Elemente $1, 2, \dots, n$ zu je k summiert. Die Relation (25), die für den Bogenparameter s hergeleitet wurde, gilt, wie man sich leicht überzeugt, für jeden Parameter der Kurve, und sie gilt nicht nur für $k = 1, \dots, r$, sondern auch für $k = r + 1$, da ja dann beide Seiten in (25) verschwinden.

Die beiden Matrizen

$$(26) \quad \left\| \begin{vmatrix} dx_1 & \dots & dx_n \\ \cdot & \dots & \cdot \\ d^r x_1 & \dots & d^r x_n \\ d^{r+1} x_1 & \dots & d^{r+1} x_n \end{vmatrix} \right\| \quad \text{und} \quad \left\| \begin{vmatrix} dx_1 & \dots & dx_n \\ \cdot & \dots & \cdot \\ d^r x_1 & \dots & d^r x_n \end{vmatrix} \right\|$$

haben somit den Rang r . Wir nehmen nun an, es sei (nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten)

$$(27) \quad \begin{vmatrix} dx_1 & \dots & dx_r \\ \cdot & \dots & \cdot \\ d^r x_1 & \dots & d^r x_r \end{vmatrix} \neq 0,$$

und betrachten die lineare homogene Differentialgleichung $r + 1$ ter Ordnung für die Funktion $\varphi(t)$ (t ist der Kurvenparameter):

$$(28) \quad \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_r & \varphi' \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_1^{(r)} & x_2^{(r)} & \dots & x_r^{(r)} & \varphi^{(r)} \\ x_1^{(r+1)} & x_2^{(r+1)} & \dots & x_r^{(r+1)} & \varphi^{(r+1)} \end{vmatrix} = 0,$$

in der der Koeffizient von $\varphi^{(r+1)} = \frac{d^{r+1}\varphi}{dt^{r+1}}$ sicher nicht Null ist. Sie hat genau $r + 1$ linear unabhängige Lösungen, durch die dann jede weitere mit konstanten Koeffizienten linear darstellbar ist. Ein solches Lösungssystem ist

$$(29) \quad 1, x_1, x_2, \dots, x_r;$$

da ferner die erste der Matrizen (26) den Rang r hat, ist jedes x_i ($i = 1, \dots, n$), eine Lösung von (28). Also gilt die Darstellung

$$(30) \quad x_i = c_{i0} + c_{i1}x_1 + \dots + c_{ir}x_r$$

mit konstanten c_{ir} . Ist also $\frac{1}{\varrho_r}$ die erste verschwindende Krümmung, so liegt die Kurve C in einer r dimensionalen Hyperebene E_r (30) und in keiner Hyperebene niederer Dimension, da ja die Größen der Reihe (29) linear unabhängig sind.

Bemerkt sei, daß die Formel (17), wenn man sie in der zweckmäßigeren Gestalt

$$(31) \quad \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{k-1}} (k)\xi_i = \frac{d^k x_i}{ds^k} + \sum_{h < k} X_h \frac{d^h x_i}{ds^h}$$

schreibt, wegen der Stetigkeit aller auftretenden Größen auch in den Punkten gilt, in welchen $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{k-1}}$ verschwindet.

Man sieht dies auch direkt so ein: Ist $\frac{1}{\varrho_h} = 0$, $h < k$ im Punkt P von C , dagegen alle vorangehenden Krümmungen $\neq 0$, so folgt aus

$$\frac{1}{\varrho_1 \dots \varrho_{h-1}} (h)\xi_i = \frac{d^h x_i}{ds^h} + \sum_{j < h} \bar{X}_j \frac{d^j x_i}{ds^j}$$

durch Differentiation nach s in P

$$\frac{-1}{\varrho_1 \dots \varrho_{h-1}} \frac{(h-1)\xi_i}{\varrho_{h-1}} = \frac{d^{h+1} x_i}{ds^{h+1}} + \sum_{j < h+1} \bar{X}_j \frac{d^j x_i}{ds^j};$$

also, da die linke Seite selbst die Form $\sum_{j < h-1} Y_j \frac{d^j x_i}{ds^j}$ hat,

$$0 = \frac{d^{h+1} x_i}{ds^{h+1}} + \sum_{j < h+1} Z_j \frac{d^j x_i}{ds^j}.$$

Ist demnach $\frac{1}{\rho_h}$ die erste verschwindende Krümmung in einem Punkte P von C , so ist in diesem Punkte $\frac{d^{h+1} x_i}{ds^{h+1}}$ durch die Ableitungen niederer Ordnung linear ausdrückbar, also auch $\frac{d^{h+2} x_i}{ds^{h+2}}$ usw.

Man beachte, daß aus (31) die Identität der Vektorräume $\{(1)\xi_i, \dots, (k)\xi_i\}$ und $\left\{\frac{dx_i}{ds}, \dots, \frac{d^k x_i}{ds^k}\right\}$ folgt.

V. Variationsrechnung.

§ I. Der n dimensionale Punktraum der Variationsrechnung.

Im n dimensionalen Punktraum, wie wir ihn in I, § 1 einführt, sei eine Funktion des kontravarianten Vektors x_i, λ^i

$$(1) \quad F(x_1, \dots, x_n; \lambda^1, \dots, \lambda^n)$$

gegeben, die wir kurz mit $F(x, \lambda)$ bezeichnen. Von einer solchen Funktion sagen wir, daß sie *in λ von k ter Ordnung positiv homogen* ist, wenn

$$(2) \quad F(x_1, \dots, x_n; c\lambda^1, \dots, c\lambda^n) = c^k F(x_1, \dots, x_n; \lambda^1, \dots, \lambda^n)$$

oder kurz

$$F(x, c\lambda) = c^k F(x, \lambda)$$

für jedes positive c gilt. Setzen wir $F = [g_{ij}(x_1, \dots, x_n) \lambda^i \lambda^j]^{\frac{1}{2}}$, so haben wir den RIEMANNschen R_n als Beispiel eines solchen Raumes. *Alle folgenden Überlegungen gelten demnach auch für die Räume der Differentialgeometrie.*

Wir erinnern an die Annahme in I, § 1, daß das Bild unseres R_n im Zahlraume x_1, \dots, x_n eine abgeschlossene topologische Kugel, d. h. das eindeutige und stetige Bild einer Punktmenge $y_1^2 + \dots + y_n^2 \leq a^2$ ist.

Wir setzen die Vektorfunktion $F(x, \lambda)$ zunächst nur als stetige Funktion der $2n$ Argumente $x_1, \dots, x_n; \lambda^1, \dots, \lambda^n$ voraus. In der Koordinatentransformationen

$$(3) \quad \bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n),$$

müssen dann die Funktionen $\bar{x}_i(x_1, \dots, x_n)$ stetig differenzierbar sein ($m \geq 1$), denn nur dann überträgt sich bei einem Koordinatenwechsel der Begriff der Stetigkeit der Funktion $F(x, \lambda)$. Mit

Max. λ

bezeichnen wir den größten der n absoluten Beträge $|\lambda^1|, |\lambda^2|, \dots, |\lambda^n|$ der Komponenten des kontravarianten Vektors x_i, λ^i . Die Relation Max. $\lambda = 1$ definiert dann in der $2n$ dimensionalen Mannigfaltigkeit x_i, λ^i eine beschränkte abgeschlossene Menge, in der die stetige Funktion $F(x, \lambda)$ ein endliches Maximum A und ein endliches Minimum B hat.

Wir wollen jetzt $F(x, \lambda)$ als positiv homogen von erster Ordnung ($k = 1$) voraussetzen, wobei noch (in diesem Paragraphen) für negative c die Relation $F(x, c\lambda) = -cF(x, \lambda)$ gelte, also allgemein

$$(2') \quad F(x, c\lambda) = |c| F(x, \lambda)$$

für beliebige reelle c sei. Dann folgt aus (2), daß $F(x, \lambda)$ für Nullvektoren $\lambda^i = 0$ verschwindet. Soll aber, wie wir nun weiter annehmen wollen,

$$(4) \quad F(x, \lambda) \geq 0$$

sein und gleich Null *nur* für Nullvektoren, so muß das oben definierte Minimum $B > 0$ sein. Trifft die Annahme (4) zu, so nennen wir das sofort zu besprechende Variationsproblem *positiv definit*. Infolge unserer Voraussetzungen gilt

$$(5) \quad A \geq F(x, \lambda) \geq B > 0$$

für $\text{Max. } \lambda = 1$. Daraus folgt für positives c

$$(6) \quad Ac \geq F(x, \lambda) \geq Bc > 0$$

für $\text{Max. } \lambda = c$, also

$$(7) \quad A \text{Max. } \lambda \geq F(x, \lambda) \geq B \text{Max. } \lambda > 0$$

für den beliebigen Vektor x_i, λ^i . Neben (7) und mit (7) äquivalent gilt

$$(7') \quad \frac{F(x, \lambda)}{B} \geq \text{Max. } \lambda \geq \frac{F(x, \lambda)}{A}.$$

Auf jedem stetig differenzierbaren, im Sinn wachsender Parameter gerichteten Kurvenbogen

$$(8) \quad x_i = x_i(t)$$

können wir durch das Integral

$$(9) \quad s = \int^t F(x, x') dt$$

einen bis auf eine additive Konstante bestimmten Parameter s , die *Bogenlänge*, einführen, die von dem Ausgangsparameter t der Kurve nicht abhängt, wenn $F(x, \lambda)$ von erster Ordnung positiv homogen ist. Für die Bogenlänge als Parameter ist

$$(9') \quad F(x, x') = 1$$

charakteristisch.

Das Integral ($t_0 < t_1$)

$$(10) \quad \int_{t_0}^{t_1} F(x, x') dt$$

nennt man den auf der Kurve (8) gemessenen *Bogen* zwischen $P_0(t = t_0)$ und

$P_1(t = t_1)$. Sind P und Q dann irgend zwei Punkte des R_n , so definiert man als ihren *Abstand*

$$(11) \quad \overline{PQ} = \overline{QP}$$

die untere Grenze aller Bogen von P nach Q (bzw. von Q nach P), d. h. die untere Grenze aller Integralwerte

$$(12) \quad \int_P^Q F(x, x') dt \quad \text{oder} \quad \int_Q^P F(x, x') dt$$

für alle P mit Q (oder Q mit P) verbindenden stetig differenzierbaren Kurvenstücke.

Der so definierte Abstand erfüllt die sogenannten *Abstandsaxiome*. In der Tat ist erstens

$$(13) \quad \overline{P_0P_1} \geq 0$$

für irgend zwei Punkte des R_n , und zweitens folgt aus $\overline{P_0P_1} = 0$

$$(14) \quad P_0 \equiv P_1.$$

Definitionsgemäß ist ja $\overline{P_0P_1}$ die untere Grenze der Integrale (12); andererseits ist

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x, x') dt \geq B \int_{t_0}^{t_1} \text{Max. } x' dt \geq B \int_{t_0}^{t_1} |x'_i| dt \geq B \left| \int_{t_0}^{t_1} x'_i dt \right| = B |x_i(t_1) - x_i(t_0)|,$$

also gilt

$$(15) \quad \overline{P_0P_1} \geq B \text{Max. } \Delta, \quad \Delta_i = x_i(t_1) - x_i(t_0),$$

wo $\text{Max. } \Delta$ den größten der n absoluten Beträge $|\Delta_1|, \dots, |\Delta_n|$ bedeutet. Aus (15) aber folgt $\text{Max. } \Delta = 0$ für $\overline{P_0P_1} = 0$, d. h. $P_0 \equiv P_1$, w. z. b. w.

Das sogenannte dritte Abstandsaxiom

$$(16) \quad \overline{PQ} + \overline{QR} \geq \overline{PR}$$

für irgendwelche drei Punkte P, Q, R des R_n ist ebenso wie das erste (13) eine unmittelbare Folge unserer Definition des Abstandes zweier Punkte.

Halten wir den Punkt P_0 fest, so ist der Abstand $\overline{P_0P}$ eine stetige Funktion der Koordinaten des Punktes P . Für jeden P mit einem dritten Punkte P_1 verbindenden Bögen gilt nämlich

$$(17) \quad \overline{PP_1} \leq \int_i^{t_1} F(x, x') dt.$$

Wir betrachten den P mit P_1 verbindenden Kurvenbogen

$$(18) \quad x_i = x_i(P) + t[x_i(P_1) - x_i(P)] = x_i(P) + t\Delta_i.$$

Für ihn ist $x_i' = \Delta_i$, also

$$(19) \quad \overline{PP_1} \leq \int_0^1 F(x, \Delta) dt \leq A \text{ Max. } \Delta.$$

Aus (19) und

$$(20) \quad |\overline{P_0P} - \overline{P_0P_1}| \leq \overline{PP_1}$$

folgt die Behauptung.

Ist \mathfrak{M} eine Punktmenge des R_n und P_0 irgendeiner seiner Punkte, so definieren wir als Abstand

$$\overline{P_0\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}P_0}$$

der Punktmenge \mathfrak{M} und des Punktes P_0 die untere Grenze der Abstände $\overline{P_0M}$ aller Punkte M der Menge \mathfrak{M} von P_0 . Halten wir die Menge \mathfrak{M} fest, so ist $\overline{\mathfrak{M}P}$ eine stetige Funktion der Koordinaten des Punktes P . Ist P_1 irgendein Punkt des R_n und M ein Punkt von \mathfrak{M} , so gilt

$$(21) \quad \overline{MP} \leq \overline{MP_1} + \overline{PP_1},$$

also für die unteren Grenzen

$$(22) \quad \overline{\mathfrak{M}P} \leq \overline{\mathfrak{M}P_1} + \overline{PP_1}.$$

Ebenso zeigt man

$$(22') \quad \overline{\mathfrak{M}P_1} \leq \overline{\mathfrak{M}P} + \overline{PP_1}.$$

Aus (19), (22) und (22') folgt die Behauptung.

Die Menge der Punkte P , für die $\overline{\mathfrak{M}P} < \varrho$ ist, heißt die ϱ -Umgebung der Punktmenge \mathfrak{M} . Wir bezeichnen sie mit

$$(23) \quad \mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M}).$$

Sie ist eine offene Punktmenge (im Zahlraum x_1, \dots, x_n). Wir zeigen dies durch den Nachweis, daß die Komplementärmenge $C(\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M}))$ von $\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M})$ abgeschlossen ist. Ist P der Grenzpunkt der konvergenten Folge P_1, P_2, P_3, \dots aus $C(\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M}))$, so folgt aus

$$(24) \quad \lim \overline{\mathfrak{M}P_\nu} = \overline{\mathfrak{M}P},$$

da $\overline{\mathfrak{M}P_\nu} \geq \varrho$, daß $\overline{\mathfrak{M}P} \geq \varrho$ ist, d. h. P ist ein Punkt von $C(\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M}))$.

Unter einer Umgebung einer abgeschlossenen Menge \mathfrak{M} verstehen wir irgendeine offene, \mathfrak{M} enthaltende Punktmenge $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$. Offen und abgeschlossen ist dabei wie oben in bezug auf den Zahlraum x_1, \dots, x_n definiert, wobei zu beachten ist, daß diese Mengeneigenschaften durch ein-eindeutige stetige Transformationen der Koordinaten nicht zerstört werden.

In jeder Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ der abgeschlossenen Menge \mathfrak{M} gibt es eine ϱ -Umgebung $\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M})$ von \mathfrak{M} , was wir kurz $\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M}) < \mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ schreiben.¹⁾ Sei nämlich $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ eine Umgebung der abgeschlossenen Menge \mathfrak{M} und

$$(25) \quad \varrho_1 \geq \varrho_2 \geq \dots \geq \varrho_n \geq \dots$$

eine monoton nach Null konvergierende Folge reeller Zahlen. Dann gilt

$$(26) \quad \mathfrak{U}_{\varrho_1}(\mathfrak{M}) > \mathfrak{U}_{\varrho_2}(\mathfrak{M}) > \mathfrak{U}_{\varrho_3}(\mathfrak{M}) > \dots$$

In der Reihe (26) gibt es eine erste Umgebung $\mathfrak{U}_{\varrho_1}(\mathfrak{M})$, die in $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ liegt. Wenn dies nicht zuträfe, so gäbe es in $C(\mathfrak{U}(\mathfrak{M}))$ eine Punktfolge

$$(27) \quad P_1, P_2, P_3, \dots$$

von der Eigenschaft, daß $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{\mathfrak{M}P_\nu} = 0$ wäre. Ein Häufungspunkt Q der Folge (27) gehört ebenfalls der abgeschlossenen Punktmenge $C(\mathfrak{U}(\mathfrak{M}))$ an; da \mathfrak{M} abgeschlossen ist, folgt aber aus $\overline{\mathfrak{M}Q} = 0$, daß Q ein Punkt von \mathfrak{M} ist²⁾, also nicht $C(\mathfrak{U}(\mathfrak{M}))$ angehören kann.

Die Variationsrechnung untersucht, unter welchen Voraussetzungen es einen zwei gegebene Punkte P_0, P_1 verbindenden Kurvenbogen $C_{P_0 P_1}^P$ gibt, dessen Bogenlänge gleich dem Abstand $\overline{P_0 P_1}$ ist. Ein solcher Kurvenbogen liefert für das Integral

$$(28) \quad \int_{P_0}^{P_1} F(x, x') dt$$

einen Wert, der nicht größer ist als jeder von einem anderen P_0, P_1 verbindenden Kurvenbogen gelieferte Integralwert. Die Problemstellung hängt dabei ab von den zur Konkurrenz zugelassenen Kurvenbogen $C_{P_0 P_1}^P$; wir ließen bisher alle zu, für die das Integral (28) sinnvoll war. Wir hätten aber ebensogut voraussetzen können, daß die in Betracht zu ziehenden Kurvenbogen (8) eine gewisse Anzahl stetiger Ableitungen besitzen, was wiederum für die Transformationen (2) Differenzierbarkeit der $\bar{x}_i(x_1, \dots, x_n)$ bis zur nämlichen Ordnung zur Folge haben müßte. Es kann ferner z. B. der Kurvenbogen $C_{P_0 P_1}^P$, der P_0 mit P_1 verbindet, einen kleinsten Wert (Minimum) liefern, wenn zur Konkurrenz nur Bogen einer Umgebung $\mathfrak{U}(C_{P_0 P_1}^P)$ von $C_{P_0 P_1}^P$ (die P_0 mit P_1 verbinden) zugelassen sind, ohne für alle P_0 mit P_1 verbindenden Kurvenbogen ein Minimum liefern zu müssen.

Wir sprechen dann von einem *relativen Minimum*, und mit solchen haben wir uns in der Folge zu beschäftigen.

1) Das Zeichen $< (>)$ ist zu lesen: „liegt in“ („enthält“).

2) Denn in \mathfrak{M} muß es einen Punkt M geben, für den $\overline{MQ} = \overline{\mathfrak{M}Q}$ ist.

§ 2. Der Eulersche Vektor.

Die Vektorfunktion $F(x, \lambda)$, die einstweilen noch nicht als in λ homogen vorausgesetzt werde, sei viermal stetig differenzierbar. Ist dann

$$(1) \quad x_i = x_i(t)$$

eine auf den für sie wesentlichen Parameter t bezogene, zweimal stetig differenzierbare Kurve C des R_n (*Parameterkurve*, d. h. Raumkurve plus Parameter), so existiert in jedem ihrer Punkte t der stetige Richtungsvektor x_i, x_i' und demnach die stetige Funktion

$$(2) \quad F(x, x').$$

Markieren wir durch zwei feste Punkte $P_0(t = t_0)$ und $P_1(t = t_1)$ den Bogen $C_{P_0}^{P_1}$ auf C , so hat das Integral

$$(3) \quad J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, x') dt$$

einen nur von diesem Parameterbogen (Kurvenbogen plus Parameter) abhängigen Wert.

Sollen *nur notwendige Bedingungen* dafür aufgestellt werden, daß $C_{P_0}^{P_1}$ unter allen P_0 mit P_1 verbindenden Parameterbogen ein Minimum liefert¹⁾, so genügt es, geeignet gewählte Klassen solcher Bogen heranzuziehen. Es sei im Bereiche

$$(4) \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad -\eta \leq \varepsilon \leq \eta$$

eine zweimal stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit F_2

$$(4') \quad \bar{x}_i = x_i(t, \varepsilon)$$

mit der Eigenschaft definiert, daß jede t -Linie ($\varepsilon = \text{konst.}$) die Punkte P_0 und P_1 verbinde. Dabei möge P_0 dem Parameter t_0 und P_1 dem Parameter t_1 entsprechen. Die Kurve $\varepsilon = 0$ sei die Kurve (1), deren Extremaleigenschaft zur Diskussion steht.

Analytisch lauten diese Aussagen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i(t, 0) = x_i(t) \\ x_i(t_0, \varepsilon) = x_i(t_0) \quad \text{also} \quad \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t_0, \varepsilon) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial x_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0 \\ x_i(t_1, \varepsilon) = x_i(t_1) \quad \text{,,} \quad \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t_1, \varepsilon) = 0 \quad \text{,,} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial x_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0. \end{array} \right.$$

1) Das Problem ist hier (anders als in § 1) ohne Bezugnahme auf eine Abstandsdefinition formuliert, die hier nicht immer gegeben werden kann, da das Integral (3) nicht allein von der Raumkurve $C_{P_0}^{P_1}$, sondern sehr wesentlich auch vom Parameter t abhängt, auf den man diese bezieht.

Eine solche F_2 (4') nennen wir eine *Vergleichs- F_2* ; gewöhnlich werden Vergleichs- F_2 einfachster Art betrachtet, nämlich

$$(6) \quad x_i(t) + \varepsilon y_i(t), \quad y_i(t_0) = y_i(t_1) = 0,$$

deren besondere Form (Linearität in ε) aber vom Koordinatensystem abhängt. Setzen wir $x_i(t, \varepsilon)$ (bei festem ε) statt $x_i(t)$ in das Integral (3) ein, so wird dieses eine Funktion von ε , die mit $J(\varepsilon)$ bezeichnet werde.

Soll unser Bogen $\varepsilon = 0$ ein Minimum liefern, so muß $J'(\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ verschwinden. $J'(0) = [J'(\varepsilon)]_{\varepsilon=0}$ wollen wir die *erste Variation des Integrals* (3) in bezug auf den Bogen $C_{P_0}^{P_1}$ (1) nennen. Die erste Variation hängt also außer von diesem Bogen noch von der Wahl der Vergleichs- F_2 (4') ab. Verschwindet unabhängig davon, welche Vergleichs- F_2 wir verwenden, die erste Variation für einen Bogen $C_{P_0}^{P_1}$, so nennen wir diesen einen *Extremalbogen*.

Ein Kurvenbogen, der das Integral (3) zu einem Minimum macht, ist demnach notwendig ein Extremalbogen. Ob umgekehrt ein Extremalbogen dieses Integral zu einem Minimum macht, bedarf weiterer Untersuchungen. Man vermeinte anfangs, aus dem Verhalten von $J'(\varepsilon)$ diesbezüglich Schlüsse — analog der Theorie der gewöhnlichen Extrema — ziehen zu können, bis WEIERSTRASS die Unkorrektheit dieses Weges aufzeigte.

Wir wollen im folgenden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Extremaleigenschaft eines Kurvenbogens $C_{P_0}^{P_1}$ aufstellen.

Für $J'(\varepsilon)$ erhalten wir durch partielle Integration des zweiten Gliedes

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} J'(\varepsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F(\bar{x}, \bar{x}')}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F(\bar{x}, \bar{x}')}{\partial x_i'} \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial \varepsilon \partial t} \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F(\bar{x}, \bar{x}')}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F(\bar{x}, \bar{x}')}{\partial x_i'} \right) \right] \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \varepsilon} dt, \end{aligned} \right.$$

da ja für $t = t_0$ und $t = t_1$ die Ableitungen $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \varepsilon}$ verschwinden. Die Differentiation unter dem Integralzeichen, d. h. die Umformung

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int \Phi(t, \varepsilon) dt = \int \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(t, \varepsilon) dt$$

ist infolge der Stetigkeit des Integranden in (7) erlaubt. Für $\varepsilon = 0$ erhalten wir aus (7)

$$(8) \quad J'(0) = \int \left[\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i'} \right) \right] \frac{\partial x_i(t, 0)}{\partial \varepsilon} dt,$$

in welcher Formel wir, da ja ε nicht vorkommt, $\frac{d}{dt}$ statt $\frac{\partial}{\partial t}$ geschrieben haben. Wir werden sofort beweisen, daß

$$(9) \quad \varrho_i = \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i'} \right)$$

in jedem Punkte einer beliebigen Parameterkurve ein kovarianter Vektor¹⁾ ist, den wir den *Eulerschen Vektor* der Parameterkurve nennen.

Wir zeigen zuerst, daß ein Extremalbogen durch das Verschwinden des Eulerschen Vektors charakterisiert ist. Vor allem sind die $\varrho_i(t)$ infolge der getroffenen Voraussetzungen über $F(x, \lambda)$ und die $x_i(t)$ stetige Funktionen von t . Ist nun für einen Wert τ , für den $t_0 \leq \tau \leq t_1$ gilt, $\varrho_i(\tau) \neq 0$, so gibt es im entsprechenden Punkte $x_i(\tau)$ einen kontravarianten Vektor σ^i , so daß $\varrho_i(\tau) \sigma^i > 0$ ist. Es existiert dann ein Intervall $\tau - \eta \leq t \leq \tau + \bar{\eta}$, in dem ebenfalls $\varrho_i(t) \sigma^i > 0$ ist. Es sei nun $\alpha(t)$ eine außerhalb dieses Intervalles verschwindende und im Intervalle positive, zweimal stetig differenzierbare Funktion von t . Als Vergleichs- F_2 setzen wir dann an

$$(10) \quad \bar{x}_i = x_i(t) + \varepsilon \alpha(t) \sigma^i;$$

wegen $\frac{\partial x_i(t, 0)}{\partial \varepsilon} = \alpha(t) \sigma^i$ ist dann

$$(11) \quad J'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \varrho_i(t) \sigma^i \alpha(t) dt > 0,$$

d. h. $C_{P_0}^{P_1}$ ist kein Extremalbogen. Da $\varrho_i = 0$ aber auch hinreichend für die Extremaleigenschaft des Bogens $C_{P_0}^{P_1}$ ist, so charakterisiert, wie behauptet, das Verschwinden des EULERSCHEN Vektors die Extremalen.

Wir hatten bisher alle zweimal stetig differenzierbaren Bogen (1) des R_n zur Konkurrenz zugelassen. Wir fragen uns nun, wie weit unsere Überlegungen richtig bleiben, wenn wir das Variationsproblem für Kurven aufstellen, die in einer r dimensionalen Hyperfläche F_r des R_n liegen, also verlangen, daß sowohl die Punkte P_0, P_1 wie auch alle sie verbindenden Bogen dieser F_r angehören. Dieses Problem läßt sich in einfachster Art auf den eben behandelten Fall zurückführen. Ist

$$(12) \quad x_i = x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r),$$

eine Parameterdarstellung der F_r , so gilt für eine Kurve $\bar{x}_i(t)$ derselben

$$(13) \quad F(x, x') = F(x(\bar{x}), \frac{\partial x}{\partial \bar{x}_\alpha} \bar{x}_\alpha') = \bar{F}(\bar{x}, \bar{x}').$$

Im r dimensionalen Raume R_r $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$ ist durch (13) eine Vektorfunktion bestimmt, die (wie $F(x, x')$) viermal stetig differenzierbar in bezug auf die

1) Der Beweis dafür ergibt sich am Schluß des Paragraphen von selbst. Was zunächst folgt, ist vom Vektorcharakter der ϱ_i unabhängig.

$2r$ Argumente \bar{x}, \bar{x}' ist, sobald $x_i (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ als fünfmal stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Da in R_r die zur Konkurrenz zugelassenen Kurven (außer der zweimal stetigen Differenzierbarkeit) keinen weiteren Einschränkungen unterworfen sind, so ist für den in der $F_r (= R_r)$ liegenden Extremalbogen das Verschwinden des EULERSCHEN Vektors

$$(14) \quad \bar{\varrho}_\alpha = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}'_\alpha} \right), \quad (\alpha = 1, \dots, r)$$

charakteristisch. Nun ist nach (13)

$$(15) \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial x'_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial \bar{x}_\beta \partial \bar{x}_\alpha} \bar{x}'_\beta, \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}'_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_k}{\partial \bar{x}'_\alpha},$$

also gilt

$$(16) \quad \bar{\varrho}_\alpha = \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial x'_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial \bar{x}_\beta \partial \bar{x}_\alpha} \bar{x}'_\beta - \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'_k} \right) - \frac{\partial F}{\partial x'_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial \bar{x}_\beta \partial \bar{x}_\alpha} \bar{x}'_\beta,$$

oder

$$(17) \quad \varrho_\alpha = \varrho_k \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_\alpha}, \quad (\alpha = 1, \dots, r; k = 1, \dots, n).$$

Für die Extremalen einer F_r des R_n ist nach (17) notwendig und hinreichend, daß der Eulersche Vektor ϱ_k (in bezug auf die Extremale als Kurve des R_n) normal steht auf dieser F_r .¹⁾ In der Tat spannen ja die r Vektoren

$$(18) \quad \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_1}, \quad \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_r}$$

den Tangentenvektorraum der F_r auf.

Durch (12) und (17) ist aber — für $r = n$ — nachgewiesen, daß die $2n$ Größen x_i, ϱ_i die Bestimmungstücke eines kovarianten Vektors (des EULERSCHEN Vektors) sind. In diesem Falle stellt (12) eine Koordinatentransformation dar und (12), (17) die einen kovarianten Vektor charakterisierende Transformation.

§ 3. Bemerkungen über den Eulerschen Vektor.

A. Verschwindet der EULERSCHE Vektor

$$(1) \quad \varrho_i = \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x'_i \partial x_k} x'_k - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x'_i \partial x'_k} x''_k$$

für jeden (zweimal stetig differenzierbaren) Kurvenbogen, so hängt der Integralwert

$$(2) \quad \int_{F_0}^{F_1} F(x, x') dt$$

1) Eine Extremale des R_n ($\varrho_k = 0$), die in der F_r liegt, ist natürlich eine Extremale der F_r ($\bar{\varrho}_\alpha = 0$).

nur von den Endpunkten P_0 und P_1 , aber nicht vom Bogen $C_{P_0}^{P_1}$ ab, und umgekehrt hat diese Eigenschaft von (2) stets $\varrho_i \equiv 0$ zur Folge, wenn wir die Einbettbarkeit zweier beliebiger Bogen mit gleichen Endpunkten in eine stetige einparametrische Schar solcher Bogen im betrachteten Raumstück voraussetzen. Wir können dann zwischen zwei Kurvenbogen, die P_0 mit P_1 verbinden, eine F_2 (2, 6) so legen, daß diesen Bogen die ε -Werte 0 und 1 zukommen. Aus $J'(\varepsilon) = 0$ (wegen $\varrho_i \equiv 0$) folgt dann $J(\varepsilon) = \text{konst.}$, also $J(0) = J(1)$.

Soll aber ϱ_i identisch verschwinden, so muß $\frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'}$ nach (1) identisch Null, d. h.

$$(3) \quad F(x, \lambda) = A_i(x) \lambda^i$$

sein. In diesem speziellen Falle ist

$$(4) \quad \varrho_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) x_i',$$

und $\varrho_j \equiv 0$ hat die bekannte Relation

$$(5) \quad \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = 0$$

für alle Punkte des R_n als Voraussetzung. Das Integral (2) ist also bei festgehaltener unterer Grenze P_0 dann und nur dann eine Funktion der oberen Grenze allein, wenn $F(x, \lambda)$ die Form (3) hat und wenn in jedem Punkte des R_n die Tensorrelation (5) gilt. Dabei ist als wesentlich vorausgesetzt, daß je zwei Bogen mit gleichen Endpunkten in eine einparametrische Schar stetig¹⁾ einbettbar, d. h. daß sie — in der Redeweise der Topologie — *homotop* sind.

B. Ist $F(x, \lambda)$ in λ^i von der ersten Ordnung positiv homogen, so hängt der Integralwert (2) bei orientierten Kurven vom Parameter nicht ab, demgemäß ändert sich bei einer Parametertransformation der Extremalencharakter einer orientierten Kurve nicht. Ist $\bar{t} = \bar{t}(t)$ eine Parametertransformation, so gilt in diesem Falle

$$(6) \quad \varrho_i = \bar{\varrho}_i \bar{t}'(t)$$

für jeden Kurvenbogen. Man beweise diese Relation!

C. Wir setzen

$$(7) \quad G(x, x') = \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i'} x_i'.$$

Dann gilt für jede Kurve

$$(8) \quad \frac{d}{dt} [F(x, x') - G(x, x')] = \varrho_i x_i'.$$

1) D. h. es soll die Kurvenschar (2, 4') die dort genannten Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllen. Das bedeutet mehr als bloße Homotopie.

In der Tat ist

$$(8') \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial F}{\partial x_i'} x_i'', \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i'' + x_i' \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i'} \right),$$

woraus (8) folgt. Somit ist für alle Kurven, für die

$$(9) \quad \varrho_i x_i' = 0,$$

d. h. ϱ_i ein Normalvektor ist,

$$(9') \quad F(x, x') - G(x, x') = \text{konst.}$$

Insbesondere ist dies für die Extremalen erfüllt, also ist $F(x, x') - G(x, x')$ ein Integral des durch $\varrho_i = 0$ definierten Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktion $x_i(t)$ (des Systems der EULERSchen Differentialgleichungen des Variationsproblems).

D. Ist $F(x, \lambda)$ in λ^k von k ter Ordnung positiv homogen (k braucht keine ganze Zahl zu sein), gilt also

$$(10) \quad F(x, c\lambda) = c^k F(x, \lambda)$$

für positives c , so ist nach EULER

$$(11) \quad G(x, x') = kF(x, x'),$$

was man aus (10) durch Differentiation nach c (für $c = 1$) verifiziert. In diesem Falle lautet (8)

$$(12) \quad (1 - k) \frac{dF(x, x')}{dt} = \varrho_i x_i'.$$

Ist $k = 1$ (dies ist der Hauptfall der Variationsrechnung, der in § 1 besonders hervorgehoben wurde), so gilt $\varrho_i x_i' = 0$, d. h. *der Eulersche Vektor jeder Kurve steht auf ihr normal*.

Ist $k \neq 1$, so ist $F(x, x')$ ein Integral der Eulerschen Differentialgleichungen.

Nehmen wir auf der Kurve $x_i = x_i(t)$ mittels $t = t(\tau)$ eine Parametertransformation vor, so gilt

$$(13) \quad \frac{dx_i}{d\tau} = x_i' \frac{dt}{d\tau},$$

also für positives $\frac{dt}{d\tau}$

$$(14) \quad F\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = F(x, x') \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^k.$$

Wir setzen (14) einer Konstanten gleich, die wir mit $\pm c^{-k}$ ($c > 0$) bezeichnen, je nachdem $F(x, x') \geq 0$ ist. Dies ergibt für τ

$$(15) \quad \tau = c \int \sqrt[k]{|F(x, x')|} dt + c_1.$$

Wir können also auf jeder Kurve, für die $F(x, x') \neq 0$ ist, einen Parameter einführen, für den $F(x, x')$ konstant wird. Dieser Parameter ist nach (15)

bis auf lineare Transformationen bestimmt. Aus (12) folgt, daß der EULERSche Vektor einer auf einen solchen Parameter bezogenen Kurve ein Normalvektor dieser Kurve ist. Ist $F = g_{ik} \lambda^i \lambda^k$, so ist für die Bogenlänge als Parameter $\varrho_i = \frac{(g) \xi_i}{\varrho_1}$, wie später gezeigt wird.

E. Sei $F(x, \lambda)$ in λ^i positiv homogen. Wir betrachten die Variationsprobleme

$$(16) \quad \int [F(x, x')]^k dt$$

und

$$(17) \quad \int F(x, x') dt.$$

Aus der Identität

$$(18) \quad \frac{\partial F^k}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^k}{\partial x_i'} \right) = k F^{k-1} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i'} \right) \right] - k(k-1) F^{k-2} \frac{\partial F}{\partial x_i'} \frac{dF}{dt}$$

folgt: Ist weder F noch F^k von erster Ordnung positiv homogen, so ist nach (12) für den Parameter der Extremalen $\frac{dF}{dt} = 0$, also folgt aus dem Verschwinden von $\frac{\partial F^k}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^k}{\partial x_i'} \right)$ auch das von $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i'} \right)$ und umgekehrt, d. h. jede Extremale von (16) ist auch Extremale von (17) und umgekehrt.

Ist jedoch F oder F^k von erster Ordnung positiv homogen, so können wir den Parameter so wählen, daß wieder $\frac{dF}{dt} = 0$ wird und somit dasselbe gilt wie oben. Es ist dabei vorausgesetzt, daß für die betrachteten Extremalen $F(x, x') \neq 0$ ist, d. h. daß sie keine *Null extremalen* sind.

F. Man beweist durch Rechnung, daß

$$(19) \quad \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial \lambda^i} = \sigma_i$$

ein kovarianter Vektor und

$$(20) \quad \frac{\partial^2 F(x, \lambda)}{\partial \lambda^i \partial \lambda^k} = \sigma_{ik} = \sigma_{ki}$$

ein (symmetrischer) kovarianter Tensor zweiter Stufe ist.

§ 4. Die Normalform des Systems der Eulerschen Differentialgleichungen.

Wir setzen voraus, daß für alle Vektoren x_i, λ^i des R_n die Determinante des in (3, 20) definierten Tensors σ_{ik} von Null verschieden ist:

$$(1) \quad |\sigma_{ik}| \neq 0.$$

Da der Rang der Matrix eines Tensors eine Invariante ist, so ist die eben getroffene Voraussetzung vom Koordinatensystem unabhängig.

Sei σ^{ij} der zu

$$(2) \quad \sigma_{i,k} = \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'}$$

adjungierte symmetrische kontravariante Tensor zweiter Stufe, für den also

$$\sigma_{i,k} \sigma^{ij} = \delta_k^j$$

gilt. Für eine Kurve C mit $x_i = x_i(t)$ erhalten wir dann durch Überschiebung von

$$\varrho_i = \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k' - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'} x_k''$$

mit σ^{ij}

$$(3) \quad x_j'' = \sigma^{ij} \left[\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k' - \varrho_i \right].$$

Für die Extremalen $\varrho_i = 0$ ist (3) dann das System der EULERSCHEN Differentialgleichungen in der Normalform, die wir kürzer

$$(4) \quad x_i'' = H_i(x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n') = H_i(x, x')$$

schreiben wollen. Da $F(x, \lambda)$ nach Voraussetzung viermal stetig differenzierbar ist, so sind die $H_i(x, x')$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente. Für allgemeine Kurven ($\varrho_i \neq 0$) gilt

$$(5) \quad x_i'' - H_i(x, x') = -\sigma^{ij} \varrho_j,$$

und somit definiert $x_i'' - H_i(x, x')$ längs jeder Kurve einen kontravarianten Vektor, dessen Verschwinden die Extremalen charakterisiert.

In dem gerade für die Variationsrechnung wichtigsten Fall, daß $F(x, \lambda)$ von erster Ordnung positiv homogen ist, verschwindet die Determinante (1), da ja dann

$$(6) \quad \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'} x_k' = 0$$

ist. Die eben angeführte Umformung der EULERSCHEN Differentialgleichungen in die Normalform (4) ist hier nicht ohne weiteres durchzuführen, da ja durch Integration von (4) eine Kurve mit einem im allgemeinen bestimmten Parameter geliefert wird, wogegen der Parameter der Extremalen im vorliegenden Falle weitgehend willkürlich ist. Doch gelingt es, gerade durch bestimmte Wahl des Parameters der Extremalen, die EULERSCHEN Gleichungen in die Normalform zu transformieren.

Wie wir sahen, sind ja die Extremalen (mit etwaiger Ausnahme der Null-extremalen) des Variationsproblems

$$(7) \quad \int [F(x, x')]^k dt \quad (k > 1 \text{ positiv ganz})$$

mit unseren identisch, sofern nur jener Parameter t eingeführt wird, für den $F(x, x')$ konstant wird. Ist für irgendein k die Determinante

$$(7) \quad \left| \frac{\partial^2 (F(x, x'))^k}{\partial x_i' \partial x_k'} \right| \neq 0,$$

so lassen sich die Extremalen des Variationsproblems (7) in die Normalform bringen, die dann mit Ausnahme der Nullextremalen die Extremalen von $\int F(x, x') dt$ liefert. Der eben geschilderte Kunstgriff wird beim Variationsproblem des RIEMANNschen R_n

$$(8) \quad \int \sqrt{g_{ik} x_i' x_k'} dt$$

auch stets verwendet.

Ist $F(x, \lambda)$ in λ positiv homogen, so ist $H_i(x, \lambda)$ in λ positiv homogen von der Ordnung zwei. Zum Beweis bemerken wir, daß durch Einsetzen von $x_i'' = H_i(x, x')$ in das System der EULERSchen Differentialgleichungen

$$(9) \quad \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k' - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'} x_k'' = 0$$

diese zu Identitäten in x und x' werden. In diese denken wir uns cx' (mit positivem c) statt x' gesetzt. Beachtet man nun, daß

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial F(x, cx')}{\partial x_i} = c^k \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i}, & \frac{\partial^2 F(x, cx')}{\partial x_i' \partial x_k} c x_k' = c^k \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k', \\ \frac{\partial^2 F(x, cx')}{\partial x_i' \partial x_k'} = c^{k-2} \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'}, \end{cases}$$

ist, so folgt

$$(11) \quad H_i(x, cx') = c^2 H_i(x, x')$$

w. z. b. w.

Diese besondere Form der Funktionen $H_i(x, x')$ hat für die Extremalen, also für die Lösungskurven des Systems (4), die folgende Konsequenz: Das Existenztheorem für Systeme (4) in der Normalform besagt, daß es zu vorgegebenen Anfangswerten

$$(12) \quad x_1^0, \dots, x_n^0; \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^0, \dots, \left(\frac{dx_n}{dt} \right)^0,$$

d. i. zu einem vorgegebenen Vektor des R_n , eine bestimmte Lösungskurve $x_i = x_i(t)$ des Systems (4) gibt, deren Richtungsvektor für $t = t_0$ der Vektor (12) ist. Diese Extremale beziehen wir durch die Transformation

$$(13) \quad t = c(\tau - \tau_0) + t_0 \quad (c > 0)$$

auf den Parameter τ . Während im allgemeinen Fall die Extremale dadurch ihren Extremalencharakter verliert, bleibt hier bei dieser Parametertrans-

formation wegen (11) der Extremalencharakter erhalten, d. h. $x_i(c(\tau - \tau_0) + t_0) = \tilde{x}_i(\tau)$ genügt mit $x_i(t)$ dem Systeme (4). In der Tat gilt

$$(14) \quad x_i(t) = \tilde{x}_i(\tau), \quad \dot{x}_i = x_i' c, \quad \ddot{x}_i = x_i'' c^2,$$

also ist

$$(15) \quad \ddot{x}_i - H_i(\tilde{x}, x') = c^2 x_i'' - H_i(\tilde{x}, c x') = c^2 [x_i'' - H_i(x, x')] = 0,$$

w. z. b. w. Aber $\tilde{x}_i(\tau)$ ist jene Extremale, die für $\tau = \tau_0$ die Anfangswerte

$$(16) \quad x_1^0, \dots, x_n^0; \quad c \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^0, \dots, c \left(\frac{dx_n}{dt} \right)^0$$

annimmt. Also fallen — wie der Vergleich von (12) und (16) ergibt — alle Extremalen zusammen, die in einem bestimmten Punkte x_1^0, \dots, x_n^0 des R_n die „Richtung“ $c \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^0, \dots, c \left(\frac{dx_n}{dt} \right)^0$, ($c > 0$) besitzen; während im allgemeinen Falle mit c diese Extremalen als Raumkurven variieren, ändert sich hier mit c nur der Parameter t , und zwar gemäß der Relation (13).

§ 5. Die Normalkoordinaten mit einem Zentrum P_0 .

Wir behandeln das *homogene Variationsproblem*, bei dem $F(x, \lambda)$ in λ positiv homogen ist; weiter seien die Voraussetzungen erfüllt, die die Reduktion der EULERSchen Differentialgleichungen auf die Normalform gestatten. Die Funktionen $H_i(x, x')$ sind dann zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente und in den x_i' von zweiter Ordnung positiv homogen.

Eine Extremale (Kurve plus Parameter) wird durch den Tangentenvektor

$$(1) \quad x_1^0, \dots, x_n^0; \quad \left(\frac{dx_1}{ds} \right)^0, \dots, \left(\frac{dx_n}{ds} \right)^0$$

eindeutig festgelegt. Ihr analytischer Ausdruck enthält daher außer dem Parameter s die $2n$ Größen (1) und den Parameterwert s_0 , für den ihr Tangentenvektor mit dem Vektor (1) identisch wird. Die Extremalen werden daher in der Form

$$(2) \quad x_i = \varphi_i(s, s_0; x_1^0, \dots, x_n^0; \left(\frac{dx_1}{ds} \right)^0, \dots, \left(\frac{dx_n}{ds} \right)^0)$$

oder kurz

$$(2') \quad x_i = \varphi_i(s, s_0, x^0, \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^0)$$

dargestellt sein. Wie die Funktionen $H_i(x, x')$ sind die φ_i in einer geeigneten Umgebung der Stelle $s_0, x^0, \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^0$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente¹⁾ und haben wegen der Homogenität der $H_i(x, x')$ in x_i' einen charakteristischen Bau, den wir jetzt aufweisen wollen. Die Parametertransformation

$$(3) \quad s = a\bar{s} + b,$$

1) Vgl. BOLZA, *Variationsrechnung*, Leipzig 1909, S. 178, Zus. 1.

wo a, b Konstante und $a > 0$ ist, führt die Extremale (2) über in die Extremale

$$(4) \quad x_i = \varphi_i \left(a\bar{s} + b, a\bar{s}_0 + b, x^0, \frac{1}{a} \left(\frac{dx}{d\bar{s}} \right)^0 \right),$$

wo \bar{s}_0 aus $s_0 = a\bar{s}_0 + b$ zu berechnen ist. Da $\frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{a} \frac{dx_i}{d\bar{s}}$ ist, durften wir $\frac{1}{a} \left(\frac{dx}{d\bar{s}} \right)^0$ statt $\left(\frac{dx}{ds} \right)^0$ setzen. Da für $\bar{s} = \bar{s}_0$ die Extremale (4) den Tangentenvektor

$$(5) \quad x_1^0, \dots, x_n^0; \left(\frac{dx_1}{d\bar{s}} \right)^0, \dots, \left(\frac{dx_n}{d\bar{s}} \right)^0$$

hat, so ist sie identisch mit der durch (5) fixierten Extremalen

$$(6) \quad x_i = \varphi_i \left(\bar{s}, \bar{s}_0, x^0, \left(\frac{dx}{d\bar{s}} \right)^0 \right).$$

Es gelten daher mit der einzigen Einschränkung $a > 0$ die Identitäten (statt \bar{s} wieder s geschrieben)

$$(7) \quad \varphi_i \left(s, s_0, x^0, \left(\frac{dx}{ds} \right)^0 \right) \equiv \varphi_i \left(as + b, as_0 + b, x^0, \frac{1}{a} \left(\frac{dx}{d\bar{s}} \right)^0 \right).$$

Indem wir $b = -as_0$ setzen, spezialisieren wir (7) zu

$$(7') \quad \varphi_i \left(s, s_0, x^0, \left(\frac{dx}{ds} \right)^0 \right) \equiv \varphi_i \left(a(s - s_0), 0, x^0, \frac{1}{a} \left(\frac{dx}{d\bar{s}} \right)^0 \right),$$

was wir nach Einführung der $n + 1$ Größen

$$(8) \quad \sigma = a(s - s_0), \quad \beta^i = \frac{1}{a} \left(\frac{dx_i}{d\bar{s}} \right)^0,$$

auch

$$(9) \quad \varphi_i \left(s, s_0, x^0, \left(\frac{dx}{ds} \right)^0 \right) \equiv \varphi_i(\sigma, 0, x^0, \beta)$$

schreiben können. Die erlaubte Differentiation von (9) nach a ergibt

$$(10) \quad 0 \equiv \frac{\partial \varphi_i(\sigma, 0, x^0, \beta)}{\partial \sigma} (s - s_0) - \frac{\partial \varphi_i(\sigma, 0, x^0, \beta)}{\partial \beta^i} \left(\frac{dx_i}{d\bar{s}} \right)^0 \frac{1}{a^2}$$

oder

$$(11) \quad 0 \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma} \sigma - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta^i} \beta^i.$$

Die n Funktionen φ_i , als Funktionen der $n + 1$ Argumente (8) aufgefaßt, sind also Lösungen der homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(12) \quad \frac{\partial \Phi(\sigma, \beta)}{\partial \sigma} \sigma - \frac{\partial \Phi(\sigma, \beta)}{\partial \beta^i} \beta^i = 0.$$

Nun ist, wie man sofort überlegt,

$$(13) \quad \alpha_r = \sigma \beta^r = (s - s_0) \left(\frac{dx_r}{d\bar{s}} \right)^0,$$

ein System von n unabhängigen Lösungen von (12), und somit ist jede weitere, also jedes φ_i , eine Funktion dieser n Lösungen, und wir haben also in

$$(14) \quad x_i = \varphi_i \left(x_1^0, \dots, x_n^0; \left(\frac{dx_1}{ds} \right)^0 (s - s_0), \dots, \left(\frac{dx_n}{ds} \right)^0 (s - s_0) \right)$$

den gesuchten analytischen Bau der die Extremalen des homogenen Variationsproblems darstellenden Funktionen.

Im System

$$(15) \quad x_i = \varphi_i(x_1^0, \dots, x_n^0; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

sind die Funktionen φ_i zweimal stetig differenzierbar mit etwaiger Ausnahme der Stellen $x_1^0, \dots, x_n^0; \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. In der Tat sind die φ_i als Funktionen von s und den $2n$ Größen (1) wie die $H_i(x, x')$ zweimal stetig differenzierbar. Es gelten ja die Relationen

$$(16) \quad \frac{\partial \varphi_i(x^0, \alpha)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^0} \frac{1}{s - s_0}$$

und

$$(16') \quad \frac{\partial^2 \varphi_i(x^0, \alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_r} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^0 \partial \left(\frac{dx_r}{ds} \right)^0} \frac{1}{(s - s_0)^2}.$$

Für $s \neq s_0$ sind die Funktionen rechter Hand in bezug auf die Argumente $x_i^0, (s - s_0), \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^0$ stetig (Existenztheorem), die sie allein in der Form $x_i^0, \alpha_i = (s - s_0) \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^0$ enthalten. Sie sind demnach für $s \neq s_0$ stetige Funktionen der x_i^0 und der α_i , w. z. b. w.¹⁾

Wir treffen nun die Vereinbarung, daß auch für die Stellen

$$x_1^0, \dots, x_n^0; \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$$

die ersten Ableitungen der Funktionen φ_i nach den α_i bestehen mögen und daselbst stetig seien²⁾; die Berechnung der $\frac{\partial \varphi_i(x^0, 0)}{\partial \alpha_i}$ ist dann in einfachster

1) Es wurde bei diesem Schlusse die triviale Tatsache verwendet: Ist Φ eine stetige Funktion der $2m$ Argumente $u_1, \dots, u_m; v_1, \dots, v_m$, die sie in der Zusammenfassung $w_1 = u_1 v_1, \dots, w_m = u_m v_m$ enthält, so ist sie als Funktion dieser m Größen stetig, wenn der Bereich der u_i oder der v_i unbeschränkt ist. Wir hatten $u_1 = u_2 = \dots = u_n = (s - s_0), v_i = \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^0$. Der Bereich der v_i ist unbeschränkt.

2) Es ist sicher möglich diese Voraussetzung einzuschränken. Die Existenz der Ableitungen an den kritischen Stellen kann man z. B. nachweisen (durch Grenzbildung aus den entsprechenden Differenzenquotienten). Die eben getroffene Vereinbarung in ihrem ganzen Umfange zu beweisen, ist uns aber nicht geglückt.

Weise möglich. Aus (15) folgt durch Differentiation nach s (also längs der Extremalen)

$$(17) \quad \frac{d x_i}{d s} = \frac{\partial \varphi_i(x^0, \alpha)}{\partial \alpha_i} \left(\frac{d x_i}{d s} \right)^0$$

und für $s \rightarrow s_0$

$$(18) \quad \left(\frac{d x_i}{d s} \right)^0 = \frac{\partial \varphi_i(x^0, 0)}{\partial \alpha_i} \left(\frac{d x_i}{d s} \right)^0.$$

Da (18) für jede Extremale durch $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ gilt und somit eine Identität in den $\left(\frac{d x_i}{d s} \right)^0$ ist, folgt

$$(19) \quad \frac{\partial \varphi_i(x^0, 0)}{\partial \alpha_i} = \delta_{ii}.$$

Das System

$$(20) \quad x_i^0 = x_i^0, \quad x_i = \varphi_i(x_1^0, \dots, x_n^0; \alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

dessen Funktionaldeterminante an der Stelle $x_i^0, \alpha_i = 0$ nach (19) den Wert Eins hat, ordnet jedem Wertesystem \tilde{x}_i^0, α_i einer gewissen Umgebung dieser Stelle ein Wertesystem \tilde{x}_i, x_i ein-eindeutig zu, und zwar bilden diese \tilde{x}_i, x_i eine Umgebung der Stelle x_i^0, x_i^0 (die ihrerseits der Stelle $x_i^0, 0$ entspricht). Ist

$$(21) \quad x_i^0 = x_i^0, \quad \alpha_i = \varphi_i(x_1^0, \dots, x_n^0, x_1, \dots, x_n),$$

das (für die Umgebung x_i^0, x_i^0) zu (20) inverse System, so sind die Funktionen φ_i einmal und mit Ausnahme der Stelle x_i^0, x_i^0 sogar zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente.

Es seien $\tilde{x}_i^0, \tilde{x}_i$ zwei Punkte in einer genügend begrenzten Umgebung von $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Dem $2n$ -Tupel $\tilde{x}_1^0, \dots, \tilde{x}_n^0; \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ entspricht dann nach (21) ein bestimmtes $2n$ -Tupel $\tilde{x}_1^0, \dots, \tilde{x}_n^0; \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n$ der entsprechenden Umgebung von $x_1^0, \dots, x_n^0, 0, \dots, 0$. Führen wir dieses $2n$ -Tupel $(\tilde{x}^0, \tilde{\alpha})$ in (20) ein, so folgt

$$(22) \quad \tilde{x}_i = \varphi_i(\tilde{x}_1^0, \dots, \tilde{x}_n^0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n).$$

Das heißt aber, daß man um einen Punkt P_0 eine Umgebung derart bestimmen kann, daß durch je zwei Punkte $\tilde{x}_i^0, \tilde{x}_i$ derselben eine Extremale (22) gezogen werden kann und zwar nur eine, für die $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n$ in einer entsprechend gewählten Umgebung von $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ liegt. Denn setzt man $\tilde{\alpha}_i t$ statt $\tilde{\alpha}_i$, so wird (22) eine Extremale, die für $t = 1$ den Punkt \tilde{x}_i und für $t = 0$ den Punkt \tilde{x}_i^0 enthält.

Nach dieser recht wichtigen Erkenntnis, die uns zeigt, daß die Extremalen des Variationsproblems (sobald die von uns getroffenen Vereinbarungen erfüllt sind) in der Umgebung eines Punktes — d. h. in genügend „klein“ gewählten Raumstücken — sich ähnlich den euklidischen Geraden verhalten, definieren wir den auch für die Differentialgeometrie fundamentalen Begriff

der Normalkoordinaten mit einem Zentrum $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Wir fassen bei Fixierung des Punktes $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ das Teilsystem von (20), (21)

$$(23) \quad \begin{cases} x_i = \varphi_i(x_1^0, \dots, x_n^0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \alpha_i = \psi_i(x_1^0, \dots, x_n^0, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

als Koordinatentransformation für die Punkte der genannten Umgebung von P_0 auf. Das neue Koordinatensystem heißt ein RIEMANNSCHEs Normalkoordinatensystem $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ (das sind die neuen Koordinaten des Punktes P_0) als Zentrum. Wir wollen allgemein ein Koordinatensystem ein Normalkoordinatensystem mit dem Zentrum P_0 nennen, wenn in ihm die Gleichungen der Extremalen durch P_0 im Parameter s linear sind. Im Koordinatensystem $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sind

$$(24) \quad \alpha_i = \xi^i s$$

mit konstanten ξ^i die Gleichungen der Extremalen durch P_0 , wie man durch Einsetzen von (24) in $x_i = \varphi_i(x_1^0, \dots, x_n^0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ohne weiteres einsieht.

Es sei $\mathcal{U}(P_0)$ eine Umgebung von P_0 (offene, P_0 enthaltende Punktmenge), in der RIEMANNSCHE Normalkoordinaten einführbar sind. Weiter sei (für den folgenden Schluß) wie in § 1 das Variationsproblem positiv definit. Wir denken uns dann mittels $F(x, x') = 1$ auf jeder Kurve den Parameter „Bogenlänge“ gegeben. Der in $\mathcal{U}(P_0)$ von P_0 nach einem Punkte P längs der betreffenden Extremalen gezählte Bogen heiße der „Abstand“ $\overline{P_0 P}$, der aber mit dem in § 1 definierten Abstand nur dann identisch ist, wenn die Extremalen $P_0 P$

für das Integral $\int_{P_0}^P F(x, x') dt$ ein Minimum liefern. Auf jeder Extremalen (24)

durch P_0 gibt es dann ein kleinstes s , für das der Punkt $\alpha_i = \xi^i s$ nicht mehr zu $\mathcal{U}(P_0)$ gehört. Wir bezeichnen mit $\varrho = \varrho(\xi^1, \dots, \xi^n)$ diesen kleinsten Wert und mit $\varrho_0 \geq 0$ die untere Grenze aller Werte ϱ . Wir behaupten, daß $\varrho_0 > 0$ ist. Wäre nämlich $\varrho_0 = 0$, so gäbe es in der Komplementärmenge $C(\mathcal{U}(P_0))$ von $\mathcal{U}(P_0)$ eine Punktfolge P_1, P_2, \dots , deren Abstände $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ von P_0 nach Null konvergierten. Im Koordinatensystem x_i seien

$$(25) \quad x_i = \varphi_i(x_1^0, \dots, x_n^0; \frac{\xi^1}{h} \varrho_h, \dots, \frac{\xi^n}{h} \varrho_h)$$

die Koordinaten von P_h . Nun gilt (§ 1) für Vektoren x_i, λ^i , für die $F(x, \lambda) = 1$ ist („Einheitsvektoren“)

$$\frac{1}{B} \geq \text{Max. } \lambda.$$

Da nach Einführung der Bogenlänge s die $\frac{d\alpha_i}{ds} = \xi^i = \left(\frac{dx_i}{ds}\right)^0$ Einheitsvektoren

sind, so ist $\frac{1}{B} \geq \text{Max. } \xi$, also $\lim_{h \rightarrow \infty} \xi^i \varrho_h = 0$, da $\varrho_h \rightarrow 0$. Aus (25) erhält man daher für den Grenzpunkt der Folge P_1, P_2, \dots

$$(25') \quad \lim_{h \rightarrow \infty} x_i = \varphi_i(x_1^0, \dots, x_n^0; 0, \dots, 0) = x_i^0,$$

d. h. P_0 ist der Grenzpunkt von P_1, \dots, P_v, \dots . Da aber $P_0 < \mathfrak{U}(P_0)$ und $P_1, P_2, \dots < C(\mathfrak{U}(P_0))$ und $C(\mathfrak{U}(P_0))$ als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist, also den Grenzpunkt P_0 von P_1, P_2, \dots enthält, so gilt auch $P_0 < C(\mathfrak{U}(P_0))$ im Widerspruch zu $P_0 < \mathfrak{U}(P_0)$. Also muß in der Tat $\varrho_0 > 0$ sein.

Die Gesamtheit aller in $\mathfrak{U}(P_0)$ gelegenen Punkte, deren auf der Extremalen von P_0 aus gemessene Abstand kleiner als ϱ_0 ist, heiße ϱ_0 -Umgebung von P_0 und sei mit $\mathfrak{U}_{\varrho_0}(P_0)$ bezeichnet. Auch sie ist mit der ebenso bezeichneten Umgebung des § 1 nicht immer identisch. Wir wollen diese ϱ_0 -Umgebung auch eine *offene Kugel* vom Radius ϱ_0 oder kurz ϱ_0 -Kugel nennen. In einer solchen ϱ_0 -Kugel liegt jeder Punkt P auf einem Extremalbogen P_0P , der ganz in $\mathfrak{U}_{\varrho_0}(P_0)$ liegt. Da es stets Umgebungen $\mathfrak{U}(P_0)$ gibt, in denen es (wenn die diesbezüglichen Festsetzungen erfüllt sind) Normalkoordinaten mit P_0 als Zentrum gibt, so gibt es für genügend kleine ϱ_0 stets solche ϱ_0 -Kugeln $\mathfrak{U}_{\varrho_0}(P_0)$.

§ 6. Charakterisierung der Normalkoordinaten durch die Vektorfunktion $F(x, \lambda)$.

Da die in den Transformationsformeln (5, 23) auftretenden Funktionen zweimal stetig differenzierbar sind (außer in P_0), kann man für jede zweimal stetig differenzierbare Kurve $x_i = x_i(t)$ in jedem ihrer Punkte (etwa mit Ausnahme des Punktes P_0) den EULERSchen Vektor ϱ , im Normalkoordinatensystem bilden. Für Extremalen verschwinden seine Komponenten. Wir erinnern weiter, daß längs der Extremalen $F(x, x')$ konstant ist. Für die Extremalen durch P_0 ¹⁾

$$(1) \quad x_i = \xi^i s$$

gilt also

$$(2) \quad F(x, \xi) = F(0, \xi).$$

1) Da wir jetzt ausschließlich die Normalkoordinaten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ verwenden, behalten wir die ursprüngliche, dem Leser wie dem Schreiber gleich gewohnte Koordinatenbezeichnung x_1, \dots, x_n für die Normalkoordinaten bei. Ebenso bedeutet jetzt $F(x, x')$ die Vektorfunktion im Normalkoordinatensystem, wobei $F(x, x')$ — in der ursprünglichen Bezeichnung — eigentlich $F\left(\varphi_1, \dots, \varphi_n; \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_j} \alpha_j', \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha_j} \alpha_j'\right)$ lautet.

Es existieren ja die Funktionen¹⁾

$$F(x, \xi), \quad \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i}, \quad \frac{\partial^2 F(x, \xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^k}$$

und sind außerdem stetig; dasselbe gilt, aber eventuell mit Ausnahme von P_0 , für die Funktionen

$$\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 F(x, \xi)}{\partial x_i \partial \xi^k}.$$

Nun berücksichtigen wir den Extremalcharakter der Kurven (1); für sie verschwindet der EULERSche Vektor, und somit ist (ausgenommen etwa in P_0)

$$(3) \quad 0 = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i} \right).$$

Wir setzen

$$(4) \quad \xi_i = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i}, \quad \xi_{i0} = \frac{\partial F(0, \xi)}{\partial \xi^i};$$

dabei kann ξ_{i0} wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i}$ auch als Grenzlage des kovarianten Vektors ξ_i angesehen werden, wenn man ihn längs $x_i = \xi^i s$ nach P_0 führt. Wir können (3) jetzt schreiben

$$(5) \quad 0 = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} - \frac{d\xi_i}{ds}$$

oder

$$(5') \quad \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} = \frac{d(\xi_i - \xi_{i0})}{ds}.$$

Da die Vektorfunktion $F(x, \lambda)$ in den λ^i positiv homogen ist, folgt aus (2), wenn wir $\xi^i = \frac{x_i}{s}$ ($s > 0$) in $F(x, \xi)$ einsetzen,

$$(6) \quad F(x, x) = F(0, x).$$

Differenzieren wir (6) nach x_i , was ja — ausgenommen etwa in P_0 — gestattet ist, so erhalten wir²⁾

$$(7) \quad \frac{\partial F(x, x)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(x, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F(0, x)}{\partial \xi^i}.$$

Ist $F(x, \lambda)$ von k ter Ordnung positiv homogen, so ist $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ von k ter, $\frac{\partial F}{\partial \xi^i}$ dagegen nur von $k - 1$ ter Ordnung positiv homogen. Die Multiplikation von (7) mit s^{-k} ergibt demnach wegen (4)

$$(8) \quad s \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} + \xi_i - \xi_{i0} = 0.$$

1) Und zwar in der Umgebung von P_0 , in der die Normalkoordinaten eingeführt wurden.

2) $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ ist die Ableitung nach dem i ten Argument in F , $\frac{\partial F}{\partial \xi^i}$ und $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ die nach dem $n + i$ ten Argument.

Wegen (5') folgt weiter

$$(9) \quad \frac{d(\xi_i - \xi_{i0})}{ds} + \frac{1}{s}(\xi_i - \xi_{i0}) = 0$$

oder integriert

$$(9'') \quad \xi_i - \xi_{i0} = \frac{c_i}{s},$$

mit konstantem c_i . Da aber längs der Extremalen $x_i = \xi^i s$ der stetige kovariante Vektor ξ_i für $s \rightarrow 0$ nach ξ_{i0} strebt, so muß $c_i = 0$ sein, also gilt

$$(9''') \quad \xi_i = \xi_{i0}.$$

Wir erhalten demnach als notwendige Bedingungen für Normalkoordinaten mit dem Zentrum $(0, \dots, 0)$

$$(10) \quad \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F(0, \xi)}{\partial \xi^i}$$

oder

$$(10') \quad \frac{\partial F(x, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F(0, x)}{\partial \xi^i}$$

und weisen sofort nach, daß diese Bedingungen auch hinreichen. Wegen der Homogenität der Funktionen $F(x, \xi)$ erhalten wir durch Überschiebung von (10) mit ξ^i

$$(11) \quad F(x, \xi) = F(0, \xi) \quad \text{oder} \quad F(x, x) = F(0, x).$$

Daraus folgt weiter durch Differentiation nach x_i

$$(12) \quad \frac{\partial F(x, x)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(x, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F(0, x)}{\partial \xi^i},$$

also nach (10')

$$(13) \quad \frac{\partial F(x, x)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} = 0.$$

Wir bilden jetzt den EULERSCHEN Vektor der Kurven $x_i = \xi^i s$ mit konstanten ξ^i . Aus (10) folgt

$$(14) \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i} \right) = 0,$$

da ja längs $x_i = \xi^i s$ die Vektorfunktion $\frac{\partial F(0, \xi)}{\partial \xi^i}$ mit dem Vektor ξ^i konstant ist. Also ist

$$(15) \quad e_i = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i} \right) = 0,$$

d. h. die Kurven $x_i = \xi^i s$ (ξ^i konstant) sind Extremalen.

§ 7. Die Weierstraßsche \mathcal{E} -Funktion.

Ist $F(x, \lambda)$ von k ter Ordnung positiv homogen, so ist

$$(1) \quad \Phi(x, \lambda) = \sqrt[k]{|F(x, \lambda)|}$$

von erster Ordnung positiv homogen. Um Fallunterscheidungen aus dem Wege zu gehen, sei das Variationsproblem jetzt positiv definit vorausgesetzt, d. h. es sei

$$(1') \quad \Phi(x, \lambda) \geq 0$$

und $= 0$ nur für Nullvektoren. Durch $\Phi(x, x') = 1$ fixieren wir auf jeder Kurve die (bis auf eine additive Konstante bestimmte) Bogenlänge. Wir operieren in Normalkoordinaten mit dem Zentrum $P_0(0, \dots, 0)$. Die Extremalen durch P_0 haben die Gleichungen

$$(2) \quad x_i = \xi^i s, \quad \frac{dx_i}{ds} = \xi^i, \quad \xi^i = \text{konst.},$$

wobei, da s die Bogenlänge ist,

$$(3) \quad \Phi(x, \xi) = 1$$

ist. Uns interessiert das Variationsproblem $\int \Phi(x, x') dt$, in welchem, wie wir wissen, die Extremalen keinen bestimmten Parameter haben. Die Forderung (3) für Extremalen bedeutet also keine Einschränkung.

Nun zeigen wir, daß die Relationen (6, 10) oder (6, 10'), die für $F(x, \lambda)$ gelten, auch für $\Phi(x, \lambda)$ richtig sind. Aus (6, 10) folgt (6, 11) und daher

$$(4) \quad \Phi(x, x) = \Phi(0, x).$$

Setzt man $F = \Phi^k$ in (6, 10), so erhält man

$$(5) \quad \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi(0, \xi)}{\partial \xi^i} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \Phi(x, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi(0, x)}{\partial \xi^i},$$

w. z. b. w. Durch (2) ist in jedem Punkte der Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$, in welcher die Normalkoordinaten konstruiert wurden, die Funktion s definiert, für die nach (3)

$$(6) \quad \Phi(x, x) = s$$

oder wegen (4)

$$(6') \quad \Phi(0, x) = s$$

gilt. Daraus folgt durch partielle Ableitung ($\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i}$ ist von nullter Ordnung homogen)

$$(7) \quad \frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi(0, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi(x, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi\left(x, \frac{x}{s}\right)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^i}$$

oder

$$(8) \quad \frac{\partial s}{\partial x_i} = \xi_i, \quad \xi_i = \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^i}.$$

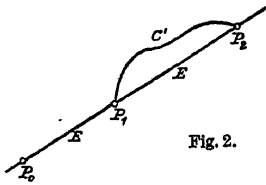


Fig. 2.

In der Kette der Relationen (7) ist $s \neq 0$ vorausgesetzt worden, d. h., daß (8) höchstens mit Ausnahme von $P_0(0, \dots, 0)$ gilt. Nun seien auf der Extremalen (2), die mit E bezeichnet sei, durch $s = s_1$ und $s = s_2$, $s_2 > s_1$, zwei Punkte P_1 und P_2 laut Fig. 2 markiert. Ferner sei C ein P_1 und P_2 verbindender Bogen, der P_0 nicht enthalte. Wir bilden dann die Integraldifferenz (E bedeutet jetzt den Bogen von P_1 nach P_2 auf der Extremalen, was wir kurz mit $E(P_1P_2)$ oder $E_{P_1}^{P_2}$ bezeichnen)

$$(9) \quad \Delta J = \int_C \Phi(x, x') dt - \int_E \Phi(x, x') dt.$$

Nun ist

$$(10) \quad \int_E \Phi(x, x') dt = \int_E \Phi(x, \xi) ds = \int_E ds = s_2 - s_1.$$

Aber nach (8) gilt weiter

$$(11) \quad s_2 - s_1 = \int_C ds = \int_C \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'} dx_i = \int_C \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'} x_i' dt.$$

Wir können ΔJ daher durch ein Integral über den Bogen C allein darstellen:

$$(12) \quad \Delta J = \int_C \left[\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'} \right] x_i' dt = \int_C \mathfrak{E}(x, x', \xi) dt,$$

wo die in x_i' von erster Ordnung positiv homogene Funktion

$$(13) \quad \mathfrak{E}(x, x', \xi) = \left[\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'} \right] x_i'$$

die sogenannte WEIERSTRASSsche \mathfrak{E} -Funktion ist. Ihrer Bildung nach ist die \mathfrak{E} -Funktion als inneres Produkt eines kovarianten Vektors $\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'}$ mit einem kontravarianten Vektor x_i' eine Invariante; also gilt die Relation (12), die ja im Normalkoordinatensystem unter weitgehender Ausnutzung der ein solches charakterisierenden Relationen abgeleitet wurde, unabhängig von einem jeden Bezugssystem. Dabei ist ξ^i stets der — im allgemeinen nicht mehr längs der Extremalen durch P_0 konstante — Richtungsvektor der den betrachteten Punkt mit P_0 verbindenden Extremalen.

Die Funktion $\mathfrak{E}(x, x', \xi)$ ist, da $\xi^i = \frac{x_i}{s}$ ein (mit Ausnahme von P_0) stetiger Ortsvektor der Umgebung von P_0 ist, in dieser Umgebung eine stetige Funktion von x und x' . Wenn wir den zwischen P_1 und P_2 genommenen Extremalbogen $E_{P_1}^{P_2}$ auf seinen wahren Extremalcharakter untersuchen, können wir, sobald wir nur Kurven zur Konkurrenz zulassen, die in der durch die

Normalkoordinaten beschriebenen Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$ liegen, mit Vorteil die Formel (12) verwenden. Ist das Integral

$$(14) \quad \Delta J = \int_a^b \mathcal{E}(x, x', \xi) dt$$

in einer Umgebung $\mathfrak{U}(E_{P_1}^P)$ der Extremalen $E_{P_1}^P$ für jeden P_1 und P_2 verbindenden Bogen dieser Umgebung nicht negativ, so liefert $E_{P_1}^P$ ein Minimum für die Kurven dieser Umgebung. Dies ist sicher der Fall, wenn in $\mathfrak{U}(E_{P_1}^P)$ die Funktion $\mathcal{E}(x, x', \xi)$ „wesentlich“ positiv ist (d. h. positiv mit Ausnahme der Stellen $x_i' = \xi^i$, an denen $\mathcal{E}(x, x', \xi)$ der Definition nach Null wird).

Andererseits kann der Extremalbogen $\widehat{P_0 P}$ (man kann P_0 immer zum Zentrum eines RIEMANNschen Normalkoordinatensystems machen) kein Minimum liefern, wenn für irgendeinen Vektor x_i, x_i' ,

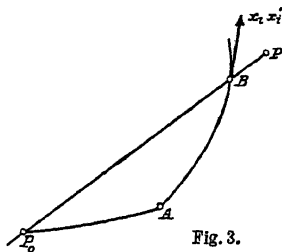


Fig. 3.

der in einem Zwischenpunkte $B(x_i)$ von $\widehat{P_0 P}$ definiert ist, $\mathcal{E}(x, x', \xi) < 0$ ist. In der Tat kann man wegen der Stetigkeit von $\mathcal{E}(x, x', \xi)$ einen stetig differenzierbaren Bogen \widehat{AB} (Fig. 3) so konstruieren, daß x_i, x_i' seine Tangente in B ist und $\mathcal{E}(x, x', \xi)$ längs \widehat{AB} kleiner als Null bleibt. Als Vergleichskurve zu $E_{P_0}^P$ verwenden wir dann den Streckenzug

$$\widehat{P_0 A} + \widehat{AB} + \widehat{BP},$$

wo $\widehat{P_0 A}$ der P_0 mit A verbindende Extremalbogen ist. Wir können dabei A so nahe an B wählen, daß dieser Streckenzug ganz in einer vorgegebenen Umgebung $\mathfrak{U}(E_{P_0}^P)$ von $E_{P_0}^P$ verbleibt. Dann gilt

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta J &= \left[\int_{P_0}^A ds + \int_A^B \Phi(x, x') dt + \int_B^P ds \right] - [s(P) - s(P_0)] \\ &= \int_A^B \Phi(x, x') dt - [s(B) - s(A)] = \int_A^B \mathcal{E}(x, x', \xi) dt < 0, \end{aligned} \right.$$

d. h. $E_{P_0}^P$ liefert kein relatives Minimum.

Die Konstruktion der \mathcal{E} -Funktion erforderte, daß sich der untersuchte Extremalbogen in ein „Feld“ von Extremalbögen, wie z. B. die Extremalen durch P_0 eines sind, einbetten ließ. Das im vorhergehenden betrachtete Extremalenfeld ist aber von spezieller Natur; wir werden jetzt versuchen eine Methode zur Herleitung allgemeinerer Resultate zu gewinnen.

§ 8. Allgemeine Herleitung der \mathcal{E} -Funktion.

Wir erinnern, daß wir in § 1 den R_n als topologische Kugel voraussetzten. In ihm sind demnach je zwei Bogen mit gleichen Endpunkten homotop (vgl. § 3 A).

Wir wollen nun einen kontravarianten Vektor x_i, ξ^i in jedem Punkte des R_n so bestimmen, daß bei Festlegung der unteren Grenze P_0 das Integral

$$(1) \quad \int_{P_0}^P \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'} dx_i$$

eine Funktion der Koordinaten des Punktes P allein ist, d. h. von der speziellen Gestalt des Integrationsweges, der von P_0 nach P führt, nicht abhängt. [In § 7 war s eine solche Funktion, vgl. (7, 8).] Dabei ist $\Phi(x, \xi)$ die im vorhergehenden betrachtete, in den ξ^i von erster Ordnung positiv homogene Vektorfunktion. Setzt man

$$(2) \quad \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'} = \xi_i,$$

so ist nach (3, 5)

$$(3) \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = 0$$

in jedem Punkte des R_n notwendig und hinreichend für die Unabhängigkeit des Integrals (1) vom Wege. Aus (3) folgt für den gesuchten Vektor x_i, ξ^i das System partieller Differentialgleichungen

$$(4) \quad \pi_{ik} = \frac{\partial^2 \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^i \partial x_k} + \frac{\partial^2 \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^k \partial x_i} - \frac{\partial^2 \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^k \partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} = 0.$$

Ist ξ^i eine Lösung von (4), so erhält man durch Integration von

$$(5) \quad \frac{dx_i}{dt} = \xi^i(x_1, \dots, x_n)$$

eine Schar von Kurven, die wir *die Gefällskurven des Vektorfeldes* x_i, ξ^i nennen wollen. Ist $x_i = x_i(t)$ eine Gefällskurve, so gilt (5) und durch nochmalige Differentiation nach t folgt

$$(6) \quad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} \xi^k.$$

Nun ist nach EULER

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^k \partial x_i} \xi^k = \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^k \partial \xi^j} \xi^k = 0;$$

durch Überschiebung von (4) mit ξ^k ergibt sich also

$$(8) \quad \pi_{ik} \xi^k = \frac{\partial^2 \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^i \partial x_k} \xi^k + \frac{\partial^2 \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} \xi^k - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i} = 0;$$

wegen (5) und (6) gilt somit für Gefällskurven

$$(9) \quad \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \Phi(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k' - \frac{\partial^2 \Phi(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'} x_k'' = 0,$$

d. h. *die Gefällskurven sind Extremalen.*

Im R_2 ist jedes Feld von Extremalen ein Gefällskurvenfeld, d. h. die Tangenten x_i, x_i' eines Extremalenfeldes sind, wenn wir $x_i' = \xi^i$ setzen, Lösungen des Systems (4), oder, was dasselbe besagt, ξ^i macht das Integral (1) vom Wege unabhängig. In der Tat folgt aus (9) oder $\pi_{i,k}\xi^k = 0$ im R_2

$$(10) \quad \pi_{12}\xi^2 = 0, \quad \pi_{21}\xi^1 = 0,$$

da ja $\pi_{i,k} = -\pi_{k,i}$ ist. Da wir ein reguläres Extremalenfeld voraussetzen, d. h. in jedem Punkte einer Extremalen des Feldes eine bestimmte Tangente, so kann nicht zugleich ξ^1 und ξ^2 verschwinden. Aus (10) folgt also

$$\pi_{12} = 0,$$

was den Inhalt des bekannten *Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes* (das Integral (1) vom Wege unabhängig) wiedergibt.

Im $R_n, n > 2$, kann nicht jedes Extremalenfeld ein Gefällskurvenfeld sein. Denn genügt ein Raumvektor x_i, ξ^i dem System (4), so ist

$$(11) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \int_{P_0} \xi_i dx_i, \quad \xi_i = \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^i}$$

eine eindeutige Funktion. Die einparametrische Hyperflächenschar $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \text{konst.}$ schneidet wegen $\xi_i dx_i = 0$ die „Gefällsparameter“ ξ_i senkrecht. Im allgemeinen aber ist im R_n ein durch $\xi_i dx_i = 0$ (in jedem Punkte des R_n) gegebener $n - 1$ dimensionaler Vektorraum dx_i nicht integrierbar, d. h. im allgemeinen gibt es keine Schar $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \text{konst.}$, so daß $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ proportional zu ξ_i ist. Jedenfalls ist die Existenz einer Schar von Hyperflächen $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \text{konst.}$, die das Extremalenfeld (d. h. die Gefällsparameter) senkrecht schneidet, notwendig, wenn dieses ein Gefällskurvenfeld sein soll.

Ist C ein zwei Punkte P und Q verbindender Gefällskurvenbogen (er ist dann auch Extremalbogen) und \bar{C} ein beliebiger, ganz im Gefällskurvenfeld gelegener, P und Q verbindender „Vergleichsbogen“, so gilt für die Integraldifferenz

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta J &= \int_{\bar{C}} \Phi(x, x') dt - \int_C \Phi(x, x') dt \\ &= \int_{\bar{C}} \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} x_i' dt - \int_C \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'} dx_i \\ &= \int_{\bar{C}} \left[\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'} \right] x_i' dt = \int_{\bar{C}} \mathcal{E}(x, x', \xi) dt. \end{aligned} \right.$$

Ist demnach ein Extremalbogen in ein Gefällskurvenfeld einbettbar, so gelingt die Darstellung der für die Feststellung der Minimaleigenschaft funda-

mentalen Integraldifferenz (12) mittels der WEIERSTRASSschen \mathcal{E} -Funktion in einfachster Weise. Es ist daher von Wichtigkeit, dieses Einbettungsproblem für den R_n , $n > 2$, zu besprechen. Das Folgende gebe ungefähr ein Bild!

Es sei ein Extremalenfeld gegeben; durch jeden Punkt des betrachteten Bereiches des R_n gehe eine bestimmte Extremale des Feldes. Weiter sei eine Hyperfläche F_{n-1} mit der Gleichung $\varphi^0(x_1, \dots, x_n) = 0$ gegeben, die jede Extremale des Feldes in genau einem Punkte trifft. Ist $x_i = x_i^0(y_1, \dots, y_{n-1})$ eine Parameterdarstellung dieser F_{n-1} , so ist jede Extremale des Feldes

$$(13) \quad x_i = \varphi_i(x_i^0(y), \dots, x_n^0(y)); \quad \xi_i^1(y)t, \dots, \xi_i^n(y)t$$

durch die Anfangslage $x_i = x_i^0(y)$, $x_i' = \xi_i^i(y)$ für $t=0$, d. h. durch ihren Richtungsvektor im Schnittpunkte mit der F_{n-1} bestimmt. Für $t=0$ ergibt

(13) die F_{n-1} . Wir bilden nun längs der Extremal-

bogen $\widehat{P_0 P}$ und $\widehat{\bar{P}_0 \bar{P}}$ (Fig. 4) die Integrale $\int \Phi(x, x') dt$ und sodann

$$(14) \quad \Delta J = \int_{\bar{P}_0}^{\bar{P}} \Phi(x, x') dt - \int_{P_0}^P \Phi(x, x') dt.$$

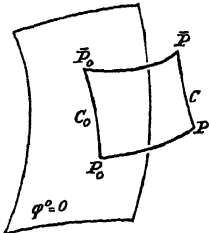


Fig. 4.

In der $F_{n-1}(\varphi^0 = 0)$ verbinde der Bogen $C_0: y_j = y_j(\varepsilon)$, ($j = 1, \dots, n-1$) die Punkte $P_0(\varepsilon=0)$ und $\bar{P}_0(\varepsilon=1)$.

Dabei sei das Feld, die Hyperfläche F_{n-1} und die Kurve C_0 so gewählt, daß die Funktionen

$$x_i^0(y), \quad \xi_i^i(y), \quad y_j(\varepsilon)$$

zweimal stetig differenzierbar sind. Die Gesamtheit der von den Punkten der C_0 ausgehenden Feldextremalen bildet eine F_2 , deren Gleichung man durch Substitution der $y_i = y_i(\varepsilon)$ in (13) in der Form $x_i = x_i(t, \varepsilon)$ gewinnt. Da die $\varphi_i(x^0, \xi_0 t)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente sind, so gilt dasselbe für die $x_i(t, \varepsilon)$. Auf den die C_0 schneidenden und die F_2 bildenden Extremalen denken wir uns noch mittels $t = \alpha(\varepsilon)\tau$, wo $\alpha(\varepsilon)$ zweimal stetig differenzierbar ist, eine Parametertransformation so vorgenommen, daß für $t=1$ (wir schreiben wieder t statt τ) $x_i(1, \varepsilon) = x_i$ ein in weitem Maße beliebiger, P mit \bar{P} verbindender Bogen C der F_2 ist.

Bilden wir dann für den Extremalbogen $x_i = x_i(t, \varepsilon)$ mit konstantem ε

$$(14) \quad J(\varepsilon) = \int_0^1 \Phi(x, x') dt,$$

so ist

$$(15) \quad \Delta J = J(1) - J(0).$$

Nun ist

$$(16) \quad J'(\varepsilon) = \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial \varepsilon} \right] dt = \int_0^1 \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} dt + \left[\xi_i \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} \right]_0^1,$$

wo ξ_i der für die Extremale ε verschwindende EULERSche Vektor und $\xi_i = \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'}$ ist. Also gilt

$$(17) \quad J'(\varepsilon) = \left[\xi_i \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} \right]_{t=1} - \left[\xi_i \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} \right]_{t=0}.$$

Für $\Delta J = \int_0^1 J'(\varepsilon) d\varepsilon$ ergibt dies

$$(18) \quad \Delta J = \int_C \xi_i dx_i - \int_{C_0} \xi_i dx_i.$$

Für geschlossene Kurven $\bar{P}_0 = P_0$, $\bar{P} = P$ verschwindet ΔJ , also gilt

$$(19) \quad \int_C \xi_i dx_i = \int_{C_0} \xi_i dx_i.$$

Schneidet nun $\varphi^0(x_1, \dots, x_n) = 0$ die Extremalen des Feldes senkrecht (oder „transversal“, wie man es in der Variationsrechnung nennt), d. h. gilt für alle Richtungen dx_i dieser F_{n-1}

$$(20) \quad \xi_i dx_i = 0,$$

so verschwindet das Integral links in (19), und wir erhalten für beliebige geschlossene Kurven

$$(21) \quad \int_C \xi_i dx_i = 0.$$

Somit ist das Integral $\int_{P_0}^P \xi_i dx_i$ vom Integrationswege unabhängig, also das Extremalenfeld ein Gefällskurvenfeld.

Wir sehen also, daß unter gewissen Annahmen über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit die Existenz einer das Extremalenfeld senkrecht schneidenden F_{n-1} auch hinreicht, damit dieses ein Gefällskurvenfeld ist.

§ 9. Zwei Folgerungen.

A. Es sei ein Gefällskurvenfeld gegeben und zwei die Extremalen dieses Feldes senkrecht schneidende F_{n-1} . Bezeichnet man als Länge eines Bogens

$C_{P_0}^{P_1}$ das Integral $\int_{P_0}^{P_1} \Phi(x, x') dt$, so gilt der Satz, daß die von den beiden F_{n-1} aus den Gefällskurven ausgeschnittenen Bogen die gleiche Länge haben. Sind $C_1(P_1Q_1)$, $C_2(P_2Q_2)$ die aus zwei Gefällskurven ausgeschnittenen Bogen (Fig. 5)

und verbindet in der einen F_{n-1} die Kurve C_3 die Punkte P_1, P_2 und in der anderen C_4 die Punkte Q_2, Q_1 , so gilt, wenn wir $J_k = \int_{C_k} \Phi(x, x') dt$ setzen,

$$\begin{aligned} \Delta J &= J_3 + J_2 + J_4 - J_1 = \int_{C_3+C_2+C_4} \left[\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'} \right] dx_i \\ &= \int_{C_3+C_4} \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} dx_i = J_3 + J_4. \end{aligned}$$

Also ist $J_2 - J_1 = 0$, w. z. b. w.

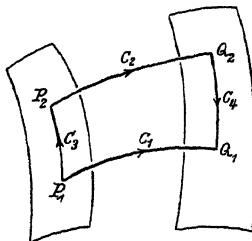


Fig. 5.

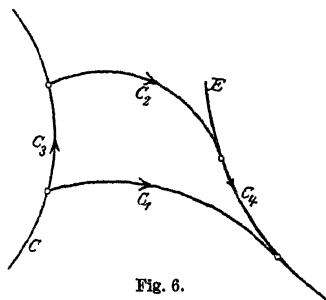


Fig. 6.

B. Der Hüllkurvensatz. Sei im R_2 ein Extremalenfeld gegeben, dessen Kurven von einer Kurve C senkrecht geschnitten werden. Die inparametrisierte Schar der Extremalen habe eine Einhüllende E (Fig. 6). Wir bilden wieder

$$\Delta J = J_3 + J_2 + J_4 - J_1 = \int_{C_3+C_2+C_4} \left[\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'} \right] dx_i = \int_{C_2} \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} dx_i = J_3,$$

da ja hier wegen $x_i' = \xi^i$ auch $\int_{C_4} \mathcal{E}(x, x', \xi) dt = 0$ ist. Somit gilt

$$(1) \quad J_2 + J_4 = J_1,$$

der sogenannte *Hüllkurvensatz*.

§ 10. Skizzierung des zweidimensionalen Variationsproblems.

Es sei im R_n eine Funktion

$$(1) \quad F(x, \eta)$$

der „ F_2 -Richtung“ (PLÜCKERScher Tensor zweiter Stufe)

$$(2) \quad \eta^{ik} = \rho^i \sigma^k - \rho^k \sigma^i$$

im Punkt x_i des R_n gegeben. Ist dann

$$(3) \quad x_i = x_i(u, v)$$

eine zweidimensionale Parameterfläche (wieder sind die Parameter wesentlich!), so ist jedem ihrer Punkte durch

$$(4) \quad \eta^{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} - \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v}$$

vermittels (1) ein Wert zugeordnet. Ist dann in der F_2 (3) durch eine singularitätenfreie geschlossene Kurve C ein einfach zusammenhängendes Gebiet G abgegrenzt, so ist diesem durch das Integral

$$(5) \quad J = \int_G F(x, \eta) \, du \, dv$$

ein bestimmter Wert zugeordnet. Führen wir in $F(x, \eta)$ statt η^{ik} den wegen $\eta^{ik} = -\eta^{ki}$ gleichen Wert $\frac{1}{2}(\eta^{ik} - \eta^{ki})$ ein, so gilt für die so umgeformte Funktion

$$(6) \quad \frac{\partial F(x, \eta)}{\partial \eta^{ik}} = -\frac{\partial F(x, \eta)}{\partial \eta^{ki}}.$$

Ist $F(x, \eta)$ in η^{ik} von erster Ordnung positiv homogen, so bleibt für Transformationen der Parameter

$$u = u(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = v(\bar{u}, \bar{v})$$

mit positiver Determinante $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ der Integralwert (5) unverändert. Dies folgt aus

$$(7) \quad \bar{\eta}^{ik} = \eta^{ik} \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}.$$

Analog wie beim Variationsproblem der Kurvenintegrale legen wir uns die Frage vor, unter welchen Voraussetzungen G ein Minimum für das Integral (5) liefert, im Vergleich zu allen anderen von der Randkurve C (von G) berandeten Gebieten.

Wir wollen ganz analog wie beim eindimensionalen Problem zuerst *notwendige* Bedingungen ableiten, wodurch wir in die Lage kommen, gewisse Klassen von Vergleichs- F_2 allein zu berücksichtigen.

Wir betrachten eine einparametrische Flächenschar

$$(8) \quad x_i = x_i(u, v, \varepsilon), \quad x_i(u, v, 0) = x_i(u, v),$$

deren Einzelflächen alle durch C berandet seien¹⁾; $\varepsilon = 0$ entspricht dem Gebiete G . In den Punkten von C gilt dann

$$(8') \quad \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Setzen wir $x_i(u, v, \varepsilon)$ statt $x_i(u, v)$ in das Integral (5) ein, so wird dieses eine Funktion von ε , die mit $J(\varepsilon)$ bezeichnet sei. Soll $G(\varepsilon = 0)$ ein Minimum für das Integral liefern, so ist $J'(0)$ notwendig gleich Null. Bezeichnet $G(\varepsilon)$ das

1) Ist $u = u(t)$, $v = v(t)$ eine Parameterdarstellung von C , so soll also die Raumkurve $x_i = x_i(u(t), v(t), \varepsilon)$ von ε unabhängig sein. Ist $y_i(u(t), v(t)) = 0$, so kann man $x_i(u, v, \varepsilon) = x_i(u, v) + \varepsilon y_i(u, v)$ setzen.

auf der Parameterfläche ε durch C begrenzte Gebiet, so gilt bei Berücksichtigung von (6) und (8')

$$(9) \quad J'(\varepsilon) = \int_{G(\varepsilon)} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}} \left(\frac{\partial^2 x_j}{\partial \varepsilon \partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} + \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial^2 x_k}{\partial \varepsilon \partial v} - \frac{\partial^2 x_j}{\partial \varepsilon \partial v} \frac{\partial x_k}{\partial u} - \frac{\partial x_j}{\partial v} \frac{\partial^2 x_k}{\partial \varepsilon \partial u} \right) \right] du dv$$

$$= \int_{G(\varepsilon)} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}} \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}} \frac{\partial x_k}{\partial u} \right) \right] \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} du dv.$$

Man zeigt nun genau wie früher, daß für jede F_2 mit der Parameterdarstellung $x_i = x_i(u, v)$

$$(10) \quad \varrho_i = \frac{\partial F(x, \eta)}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F(x, \eta)}{\partial \eta^{ik}} \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F(x, \eta)}{\partial \eta^{ik}} \frac{\partial x_k}{\partial u} \right)$$

ein kovarianter Vektor ist, den wir wieder den *Eulerschen Vektor* des Variationsproblems nennen wollen. Wir können ϱ_i auch schreiben

$$(10') \quad \varrho_i = \frac{\partial F(x, \eta)}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial^2 F(x, \eta)}{\partial x_i \partial \eta^{ik}} \eta^{ik} - 2 \frac{\partial^2 F(x, \eta)}{\partial \eta^{ik} \partial \eta^{pq}} \left[\frac{\partial \eta^{pq}}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} - \frac{\partial \eta^{pq}}{\partial v} \frac{\partial x_k}{\partial u} \right].$$

Ist ein F_2 -Feld mit der Eigenschaft gegeben, daß es durch jeden Punkt des betrachteten Raumstückes eine bestimmte F_2 gibt, so kann man $\eta^{pq} = \eta^{pq}(x_1, \dots, x_n)$ als Funktion der Punkte dieses Raumstückes auffassen; für ein solches Feld tritt an Stelle von (10')

$$(10'') \quad \varrho_i = \frac{\partial F(x, \eta)}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial^2 F(x, \eta)}{\partial x_i \partial \eta^{ik}} \eta^{ik} - 2 \frac{\partial^2 F(x, \eta)}{\partial \eta^{ik} \partial \eta^{pq}} \frac{\partial \eta^{pq}}{\partial x_i} \eta^{ik}.$$

Das System der partiellen Differentialgleichungen $\varrho_i = 0$ möge wieder das System der *Eulerschen Differentialgleichungen* und F_2 -Gebiete, für die ϱ_i verschwindet, *Extremalgebiete des Variationsproblems* genannt werden. Werden nur solche F_2 -Mannigfaltigkeiten betrachtet, für die ϱ_i stetig ist, so folgt wie früher, daß alle Gebiete, für die (5) ein Minimum wird, Extremalgebiete sein müssen. Setzen wir $G(x, \eta) = \frac{\partial F(x, \eta)}{\partial \eta^{ik}} \eta^{ik}$, so gilt für jede F_2 (3)

$$(11) \quad \frac{\partial(F-G)}{\partial u} = \varrho_i \frac{\partial x_i}{\partial u}, \quad \frac{\partial(F-G)}{\partial v} = \varrho_i \frac{\partial x_i}{\partial v}$$

oder

$$(11') \quad d(F-G) = \varrho_i dx_i.$$

Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial \eta^{pq}} \frac{\partial \eta^{pq}}{\partial u}, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = \eta^{pq} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{pq}} \right) + \frac{\partial F}{\partial \eta^{pq}} \frac{\partial \eta^{pq}}{\partial u}$$

ist nämlich

$$(12) \quad \frac{\partial(F-G)}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}} \right) \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} - \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} \right)$$

$$= \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}} \right) \frac{\partial x_k}{\partial v} \right] \frac{\partial x_i}{\partial u};$$

andererseits kann man wegen (10)

$$(10'') \quad \varrho_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}} \right) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial v} + 2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}} \right) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial u}$$

schreiben, so daß

$$(12') \quad \frac{\partial(F-G)}{\partial u} = \varrho_i \frac{\partial x_i}{\partial u} - 2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}} \right) \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial u} = \varrho_i \frac{\partial x_i}{\partial u},$$

wird, w. z. b. w.

Ist insbesondere $F(x, \eta)$ in η^{ik} von k ter Ordnung positiv homogen, so tritt an Stelle von (11')

$$(13) \quad (1-k)dF = \varrho_i dx_i$$

für jede F_2 (3).

Ist $k=1$, so ist $\varrho_i dx_i = 0$, d. h. der Eulersche Vektor einer jeden F_2 (3) ist ein Normalvektor derselben.

Ist $k \neq 1$, so ist $F(x, \eta)$ längs einer Extremalenfläche ($\varrho_i = 0$) konstant, was auch für F_2 -Mannigfaltigkeiten gilt, für die ϱ_i ein Normalvektor ist. Umgekehrt folgt aus der Konstanz von $F(x, \eta)$ längs einer F_2 , daß der EULERSCHE Vektor ein Normalvektor der F_2 ist.

Durch eine Parametertransformation (7) läßt sich im homogenen Fall für eine F_2 stets erreichen, daß $|F(x, \eta)| = 1$ ist, wenn $F(x, \eta) \neq 0$ ist. Seien \bar{u}, \bar{v} die so bestimmten Parameter, so gilt — die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(uv)}{\partial(\bar{u}\bar{v})} > 0$ vorausgesetzt —

$$(14) \quad 1 = |F(x, \bar{\eta})| = |F(x, \eta)| \left| \frac{\partial(uv)}{\partial(\bar{u}\bar{v})} \right|^k = |f(u, v)| \left(\frac{\partial(uv)}{\partial(\bar{u}\bar{v})} \right)^k,$$

wo $F(x, \eta) = f(u, v)$ für die vorliegende F_2 sei. Wir haben nur

$$(14') \quad \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial(uv)} = \sqrt[k]{|f(u, v)|}$$

zu erfüllen, d. h. eine Lösung \bar{u}, \bar{v} der partiellen Differentialgleichung (14') aufzusuchen. Setzt man zu diesem Zwecke $\bar{v} = v$, so wird (14') zu

$$(14'') \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = \sqrt[k]{|f(u, v)|}, \text{ also ist } \bar{u} = \int \sqrt[k]{|f(u, v)|} du + g(v).$$

Es gilt ein zu § 3, E völlig analoger Satz, der auch ebenso bewiesen wird.

Das identische Verschwinden des Vektors ϱ_i besagt, daß der Wert des Integrals (5) nicht mehr vom Gebiete G , sondern allein von der Randkurve C von G abhängt. (Dabei ist noch vorausgesetzt, daß im R_n je zwei F_2 -Gebiete mit gemeinsamem Rand C in eine einparametrische Schar solcher Gebiete einbettbar sind.) Das kann aber nur für die spezielle Form

$$(15) \quad F(x, \eta) = A_{ik}(x_1, \dots, x_n) \eta^{ik}, \quad A_{ik} = -A_{ki}$$

eintreten¹⁾; es wird dann

$$(15') \quad \varrho_j = \left[\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial A_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_k} \right] \eta^{ik}.$$

Soll also ϱ_j identisch verschwinden, so ist notwendig und hinreichend, daß in jedem Punkt des R_n

$$(16) \quad \pi_{ikj} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial A_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_k} = 0$$

gilt. Dabei ist π_{ikj} mit A_{ik} alternierend und ein kovarianter Tensor, wenn A_{ik} ein solcher ist.

Wir stellen uns nun analog wie in § 8 die Aufgabe, den schiefsymmetrischen Tensor

$$(17) \quad \xi^{ik} = -\xi^{ki}$$

so zu bestimmen, daß

$$(18) \quad A_{ik} = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \eta^{ik}}$$

dem System (16) genügt, d. h. daß $\int_G \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \eta^{ik}} \eta^{ik} du dv$ nicht vom Gebiet G , sondern nur von der Randkurve C von G abhängt. Dabei sei $F(x, \eta)$ in η von erster Ordnung positiv homogen. Setzen wir (18) in (16) ein, so führt dies auf ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für ξ^{ik} :

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \pi_{ikj} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^{ik} \partial x_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^{ik} \partial \eta^{pa}} \frac{\partial \xi^{pa}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^{kj} \partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^{kj} \partial \eta^{pa}} \frac{\partial \xi^{pa}}{\partial x_i} \\ &\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^{ji} \partial x_k} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^{ji} \partial \eta^{pa}} \frac{\partial \xi^{pa}}{\partial x_k} = 0. \end{aligned} \right.$$

Wir denken uns nun eine Lösung $\xi^{ik}(x_1, \dots, x_n)$ von (19) gefunden, die die besondere Eigenschaft hat, daß die $\xi^{ik} F_2$ -Elemente sind und sich weiter zu F_2 -Mannigfaltigkeiten vereinigen lassen. Dann muß ξ^{ik} ein PLÜCKERScher Tensor

$$(19') \quad \xi^{ik} = \varrho^i \sigma^k - \varrho^k \sigma^i,$$

und außerdem das System $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \varrho^i = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \sigma^i = 0$ vollständig sein. Dadurch ist im R_n ein „Gefällsflächenfeld“ gegeben. Ist dann für eine Gefällsfläche $x_i(u, v)$

$$(20) \quad \eta^{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} - \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} = \alpha(u, v) \xi^{ik},$$

1) Aus $T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki})$ folgt für den alternierenden Tensor η^{ik}

$$T_{ik} \eta^{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) \eta^{ik}.$$

Man kann somit stets annehmen, daß die Koeffizienten A_{ik} einer in η^{ik} linearen Form der Relation $A_{ik} = -A_{ki}$ genügen.

so kann man durch geeignete Parametertransformation erreichen, daß $\alpha = 1$, also

$$(21) \quad \xi^{ik} = \frac{\partial x_i \partial x_k}{\partial u \partial v} - \frac{\partial x_k \partial x_i}{\partial u \partial v}$$

wird. Wir bilden nun $\pi_{ikj} \xi^{ik}$. Wegen

$$(22) \quad \frac{\partial^2 F(x, \xi)}{\partial \eta^{ik} \partial x_j} \xi^{ik} = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 F(x, \xi)}{\partial \eta^{ik} \partial \eta^{pq}} \xi^{ik} = 0$$

erhalten wir

$$(23) \quad \pi_{ikj} \xi^{ik} = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial^2 F(x, \xi)}{\partial \eta^{kj} \partial x_i} \xi^{ik} + 2 \frac{\partial^2 F(x, \xi)}{\partial \eta^{kj} \partial \eta^{pq}} \frac{\partial \xi^{pq}}{\partial x_i} \xi^{ik} = 0,$$

d. h. nach (10''), daß $\rho_j = 0$ ist. Die Gefällsflächen eines Feldes sind Extremalflächen.

Es sei nun im R_3 ein Extremalflächenfeld gegeben, d. h., es soll durch jeden Punkt genau eine (reguläre) Extremalfläche verlaufen, deren Tangentenvektorraum die PLÜCKERSchen Koordinaten ξ^{ik} hat. Die Relation (23) zerfällt im R_3 in

$$(24) \quad \pi_{231} \xi^{23} = 0, \quad \pi_{312} \xi^{31} = 0, \quad \pi_{123} \xi^{12} = 0.$$

Da die Matrix des Tangentenvektorraumes

$$(25) \quad \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{array} \right\|$$

den Rang zwei hat (weil die entsprechende Extremalfläche in jedem Punkte regulär ist), so kann nicht $\xi^{12} = \xi^{23} = \xi^{31} = 0$, sondern es muß $\pi_{123} = \pi_{231} = \pi_{312} = 0$ oder $\pi_{i,j,k} = 0$ sein. Im R_3 gilt daher:

Setzt man in das über ein zweidimensionales Gebiet G des R_3 erstreckte Integral

$$\int_G \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \eta^{ik}} \eta^{ik} du dv$$

für ξ^{ik} die Plückerschen Koordinaten

$$\xi^{ik} = \frac{\partial x_i \partial x_k}{\partial u \partial v} - \frac{\partial x_k \partial x_i}{\partial u \partial v}$$

eines Feldes von Extremalflächen, so wird das Integral eine Funktion der Randkurve C von G . Dies ist der Inhalt des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes für die Variation zweifacher Integrale im R_3 .

Sei jetzt C die Randkurve eines Extremalgebietes G , das einem Gefällsfelde angehört, und G^* ein zweites von C berandetes und ganz im Felde gelegenes Vergleichsgebiet. Wir bilden dann die Integraldifferenz

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta J &= \int_{G^*} F(x, \eta) \, du \, dv - \int_G F(x, \eta) \, du \, dv \\ &= \int_{G^*} F(x, \eta) \, du \, dv - \int_G \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \eta^{ik}} \eta^{ik} \, du \, dv \\ &= \int_{G^*} \left[\frac{\partial F(x, \eta)}{\partial \eta^{ik}} - \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \eta^{ik}} \right] \eta^{ik} \, du \, dv. \end{aligned} \right.$$

Führen wir die WEIERSTRASSsche \mathcal{E} -Funktion ein

$$(27) \quad \mathcal{E}(x, \eta, \xi) = \left[\frac{\partial F(x, \eta)}{\partial \eta^{ik}} - \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \eta^{ik}} \right] \eta^{ik},$$

so gilt wieder

$$(28) \quad \Delta J = \int_{G^*} \mathcal{E}(x, \eta, \xi) \, du \, dv.$$

Als Beispiel sei das folgende geometrisch wichtige Problem der zweidimensionalen Minimalflächen des RIEMANNschen R_n erwähnt. Wir setzen im RIEMANNschen R_n mit dem Maßtensor g_{ik}

$$(29) \quad F(x, \eta) = \frac{1}{2} \sqrt{(g_{ik} g_{jn} - g_{in} g_{jk}) \eta^{ij} \eta^{kn}}.$$

$F(x, \eta)$ ist in η^{ik} von erster Ordnung positiv homogen. Das entsprechende Variationsproblem fragt nach der von einer geschlossenen Kurve C berandeten zweidimensionalen Fläche geringsten Flächeninhaltes. Für

$$(30) \quad \eta^{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x_j}{\partial u}$$

gilt in der Tat

$$(31) \quad (F(x, \eta))^2 = (g_{ik} g_{jn} - g_{in} g_{jk}) \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_n}{\partial v} = eg - f^2,$$

wo e, f, g die Koeffizienten der ersten Grundform (der Maßtensor) der Fläche sind. Also ist

$$(32) \quad \int_G F(x, \eta) \, du \, dv = \int_G \sqrt{eg - f^2} \, du \, dv$$

gleich dem Inhalt des Integrationsgebietes G . Wir berechnen die entsprechende \mathcal{E} -Funktion und erhalten

$$(33) \quad 2\mathcal{E}(x, \eta, \xi) = \frac{(g_{ik} g_{jn} - g_{in} g_{jk}) \eta^{ij} \eta^{kn}}{\sqrt{(g_{ik} g_{jn} - g_{in} g_{jk}) \eta^{ij} \eta^{kn}}} - \frac{(g_{ik} g_{jn} - g_{in} g_{jk}) \xi^{ij} \eta^{kn}}{\sqrt{(g_{ik} g_{jn} - g_{in} g_{jk}) \xi^{ij} \xi^{kn}}} \\ = \frac{\sqrt{g_{ik} g_{jn} - g_{in} g_{jk}} \eta^{ij} \eta^{kn} \sqrt{(g_{ik} g_{jn} - g_{in} g_{jk}) \xi^{ij} \xi^{kn}} - (g_{ik} g_{jn} - g_{in} g_{jk}) \xi^{ij} \eta^{kn}}{\sqrt{(g_{ik} g_{jn} - g_{in} g_{jk}) \xi^{ij} \xi^{kn}}}.$$

An diesem etwas umfangreichen Ausdruck interessiert uns nur die Einsicht, daß $\mathcal{E}(x, \eta, \xi) \geq 0$ und nur für $\eta^{ij} = \alpha \xi^{ij}$ gleich Null wird. Der „Flächentensor“ $g_{ik}g_{jn} - g_{in}g_{jk}$ ist ja das Komponentensystem der *positiv definiten quadratischen Form* $(g_{ik}g_{jn} - g_{in}g_{jk})\tau^{ij}\tau^{kh}$ des allgemeinsten alternierenden Tensors τ^{ij} .

§ II. Anwendung auf den Riemannschen R_n .

Die Extremalen des Variationsproblems

$$(1) \quad \int \sqrt{g_{ik} x'_i x'_k} dt$$

heißen die *geodätischen Linien* oder kurz *Geodätischen* des RIEMANNschen R_n . Wir berechnen für eine Kurve C mit der Parameterdarstellung $x_i = x_i(t)$ den EULERSchen Vektor ϱ_α . Aus

$$(2) \quad F(x, x') = \sqrt{g_{ik} x'_i x'_k}$$

folgt

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2F} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha} x'_i x'_k, \quad \frac{\partial F}{\partial x'_\alpha} = \frac{1}{F} g_{i\alpha} x'_i.$$

Nun ist

$$(4) \quad \frac{x'_i}{F} = (1)\xi^i$$

wegen $g_{ik}(1)\xi^i(1)\xi^k = 1$ der normierte Tangentenvektor, also ist $\frac{\partial F}{\partial x'_\alpha} = (1)\xi_\alpha$ und

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'_\alpha} \right) = \frac{d}{dt} (1)\xi_\alpha = \frac{d}{ds} (1)\xi_\alpha \frac{ds}{dt} = \left[\begin{matrix} \alpha i \\ l \end{matrix} \right] (1)\xi_l (1)\xi^i + \frac{(2)\xi_\alpha}{\varrho_1} \frac{ds}{dt},$$

wo s die Bogenlänge der Kurve $x_i = x_i(t)$ bedeutet. Da ferner $x'_i = \frac{dx_i}{dt} = (1)\xi^i \frac{ds}{dt}$ ist, so können wir statt (3)

$$(6) \quad \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha} (1)\xi^i (1)\xi^k \frac{ds}{dt}$$

schreiben. Nun ist $\left\{ \begin{matrix} \alpha i \\ l \end{matrix} \right\} (1)\xi_l = \left[\begin{matrix} \alpha i \\ k \end{matrix} \right] g^{kl} (1)\xi_l = \left[\begin{matrix} \alpha i \\ k \end{matrix} \right] (1)\xi^k$,

also $\left\{ \begin{matrix} \alpha i \\ l \end{matrix} \right\} (1)\xi_l (1)\xi^i = \left[\begin{matrix} \alpha i \\ k \end{matrix} \right] (1)\xi^i (1)\xi^k = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha} (1)\xi^i (1)\xi^k$.

Wir haben demnach

$$(7) \quad \varrho_\alpha = \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'_\alpha} \right) = - \frac{(2)\xi_\alpha}{\varrho_1} \frac{ds}{dt}.$$

Unsere Resultate betreffs der Extremalen lauten daher:

Für die Geodätischen des R_n ist das Verschwinden der ersten Krümmung notwendig und hinreichend.

Für die Geodätischen einer Hyperfläche F_1 des R_n ist notwendig und hinreichend, daß die erste Normale senkrecht auf der F_1 steht, sofern $\frac{1}{\varrho_1} \neq 0$ ist. Jede in der F_1 liegende Geodätische des R_n ($\frac{1}{\varrho_1} = 0$) ist eine Geodätische der F_1 .

Aus

$$\frac{(\frac{1}{\varrho_1})^2}{\varrho_1} = \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} p q \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_p}{ds} \frac{dx_q}{ds}$$

folgt, daß

$$(8) \quad \frac{dx_i'}{ds} = \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} p q \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_p}{ds} \frac{dx_q}{ds} = 0$$

das (auf die Bogenlänge als Parameter bezogene) System der Eulerschen Differentialgleichungen in der Normalform ist. Wie wir wissen, bestimmt das System (8) den Parameter s bis auf eine lineare Transformation $\bar{s} = as + b$. Ein Integral des Systems (8) kennen wir, nämlich $g_{ik} x_i' x_k'$. Wegen (8) und $\frac{b}{s} g_{ik} = 0$ ergibt sich das auch direkt:

$$(9) \quad \frac{d}{ds} (g_{ik} x_i' x_k') = \frac{b}{s} (g_{ik} x_i' x_k') = 0,$$

also $g_{ik} x_i' x_k' = \text{konst.}$

Da es keine Nullkurven gibt ($g_{ik} \lambda^i \lambda^k \neq 0$), ist (8) äquivalent mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i'} \right) = 0$$

für $F = g_{ik} x_i' x_k'$, eine Bemerkung, die bei der Berechnung der CHRISTOFFELklammern oft nützlich ist.

Als Aufgabe berechne man die WEIERSTRASSsche \mathcal{E} -Funktion und zeige, daß sie wesentlich positiv ist.

Die Riemannschen Normalkoordinaten eines Punktes P_0 sind Koordinaten, in denen die Gleichungen der Geodätischen durch P_0 (Zentrum oder Ursprung des Koordinatensystems) in der Bogenlänge s linear sind, also die Form

$$(10) \quad x_i = \xi^i s$$

mit konstanten ξ^i haben. Notwendig und hinreichend für ein RIEMANNSCHEs Koordinatensystem mit dem Ursprung P_0 ist das Bestehen der Relationen (6, 10'), d. h.

$$(11) \quad g_{ik}(x_1, \dots, x_n) x_k = g_{ik}(0, \dots, 0) x_k.$$

Durch eine Transformation $\bar{x}_i = a_{ik} x_k$ (eine solche zerstört den Charakter der Normalkoordinaten nicht) kann man erreichen, daß $\bar{g}_{ik}(0, \dots, 0) = \delta_{ik}$ wird. Charakteristisch für die RIEMANNschen Normalkoordinaten mit $g_{ik}(0, \dots, 0) = \delta_{ik}$ ist

$$(12) \quad g_{ik} x_k = x_i.$$

Aus (10) folgt für die Geodätischen durch das Zentrum $\frac{d^2 x_i}{ds^2} = 0$; also ist in P_0 , wenn wir $\frac{dx_i}{ds} = \xi^i$ setzen, für jede Geodätische (für jede Richtung ξ^i)

$$(13) \quad \left\{ \begin{matrix} p & q \\ i \end{matrix} \right\} \xi^p \xi^q = 0;$$

in P_0 muß also $\left\{ \begin{matrix} p & q \\ i \end{matrix} \right\} = 0$, also auch $\left[\begin{matrix} p & q \\ i \end{matrix} \right] = 0$ und somit auch

$$(14) \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = 0$$

gelten. Verschwinden in einem Punkte P_0 die Ableitungen des Maßtensors g_{ik} , so nennen wir das bezügliche Koordinatensystem in P_0 geodätisch. Dann bedeutet (14):

Die Normalkoordinaten mit dem Ursprung P_0 sind in P_0 geodätisch.

Es sei zum Schluß noch darauf hingewiesen, daß in allgemeinen (nicht RIEMANNschen) Räumen die Extremale \widehat{PQ} , die von P nach Q im Sinn wachsenden Parameters orientiert ist, von der Extremalen \widehat{QP} verschieden ist; es muß die eine nicht existieren, auch wenn die andere vorhanden ist.

Für die Geodätischen des RIEMANNschen Raumes besteht aber kein Unterschied der beiden Extremalen \widehat{PQ} und \widehat{QP} , denn ist $x_i = \varphi_i(s)$ eine Extremale, so gilt dasselbe von $x_i = \varphi_i(-s)$.

VI. Der Riemannsche R_n , Fortsetzung.

§ I. Die Parallelverschiebung von Levi-Civita.

Genügt ein längs einer stetig differenzierbaren Kurve C mit der Parameterdarstellung $x_i = x_i(t)$ definierter Tensor

$$(1) \quad x_i(t), \quad T_{ij}(t)$$

dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(2) \quad \mathfrak{D} T_{ij} = 0,$$

so wollen wir von ihm in der von LEVI-CIVITA eingeführten Redeweise als von einem längs der Kurve C *parallel verschobenen Tensor* sprechen. Markieren wir auf C einen Punkt $P_0 (t = t_0)$, so erhalten wir den Tensor (1) durch Integration des Systems (2) bei vorgegebener Anfangslage $T_{ij}(t_0)$ in eindeutiger Weise. Ein parallel verschobener Tensor ist also durch eine vorgegebene Anfangslage in einem Punkte P_0 der Kurve C , längs der er parallel verschoben wird, eindeutig bestimmt.

Ein Beispiel eines längs jeder Kurve parallel verschobenen Tensors bietet der Maßtensor $g^{ik}, g_{ik}, \delta_k^i$ des RIEMANNschen R_n . Ein weiteres Beispiel ist ein längs der Kurve C definierter konstanter Skalar.

Es gelten folgende Sätze:

a) Die Summe zweier gleichartiger, längs derselben Kurve C parallel verschobener Tensoren ist ein längs C parallel verschobener Tensor. Dieser Satz folgt aus $\mathfrak{D}(U + V) = \mathfrak{D}U + \mathfrak{D}V$.

b) Das Produkt zweier beliebiger, längs derselben Kurve C parallel verschobener Tensoren ist ein längs C parallel verschobener Tensor. Dies folgt aus $\mathfrak{D}(UV) = U\mathfrak{D}V + V\mathfrak{D}U$.

In den Sätzen a) und b) kann statt „zweier“ natürlich „mehrerer“ geschrieben werden. Sind μ^i und ν^k zwei längs C parallel verschobene Vektoren, so ist

$$(3) \quad \mathfrak{D}(g_{ik}\mu^i\nu^k) = d(g_{ik}\mu^i\nu^k) = 0$$

längs C , somit $g_{ik}\mu^i\nu^k = \text{konst.}$ Also: Längen und Winkel zweier Vektoren bleiben bei Parallelverschiebung längs derselben Kurve un geändert.

Verschiebt man ein normiertes n -Bein $(\alpha)\mu_i$ längs C parallel von P_0 nach P (d. h. integriert man das System $\delta(\alpha)\mu_i = 0$ mit der Anfangslage $(\alpha)\mu_i(t_0)$, wo $(\alpha)\mu_i(t_0)$ in $P_0(t=t_0)$ ein normiertes n -Bein ist), so erhält man in jedem Punkte t von C ein normiertes n -Bein.

Ist $T_{ij}^k \dots$ ein längs C parallel verschobener Tensor und

$$(4) \quad T_{ij}^k \dots = (\alpha\beta \dots \gamma \dots) T (\alpha)\mu_i (\beta)\mu_j \dots (\gamma)\mu^k \dots$$

seine Darstellung mittels des obigen normierten n -Beins in P_0 , so gilt (4) längs der ganzen Kurve C mit konstanten

$$(5) \quad (\alpha\beta \dots \gamma \dots) T = T_{ij}^k \dots (\alpha)\mu^i (\beta)\mu^j \dots (\gamma)\mu^k \dots$$

Aus dieser Bemerkung folgt, daß die Parallelverschiebung der Tensoren im R_n auf die von Vektoren zurückgeführt werden kann. Für Vektoren ist (2) äquivalent mit

$$(6) \quad d\lambda^i = - \left\{ \begin{matrix} p & q \\ & i \end{matrix} \right\} \lambda^p dx_q$$

bzw.

$$(6') \quad d\lambda_i = \left\{ \begin{matrix} i & q \\ p & \end{matrix} \right\} \lambda_p dx_q.$$

Die Gleichungen (6) und (6') sind wegen $\delta\lambda^i = g^{ik} \delta\lambda_k$ äquivalent. Für den Tangentenvektor $(1)\xi^i$ einer Kurve C folgt aus

$$(7) \quad \delta_{(1)\xi^i} = \frac{(\alpha)\xi^i}{e_1} ds,$$

daß $(1)\xi^i$ für eine Geodätische und nur für eine solche ein (längs C) parallel verschobener Vektor ist. Denn für eine Geodätische ist ja $\frac{1}{e_1} = 0$ als notwendig und hinreichend erkannt worden (V, § 11).

Im allgemeinen hängt die Endlage eines von P_0 nach P längs des Bogens $C_{P_0}^P$ parallel verschobenen Tensors außer von der Anfangslage in P_0 noch vom Bogen $C_{P_0}^P$ ab, wie ja z. B. aus (6) ersichtlich ist. Die Komponenten in der Endlage P sind Funktionen der Anfangslage und des P_0 mit P verbindenden Bogens. Wir wollen nun annehmen, es gebe einen Vektor

$$(8) \quad \lambda^i = \lambda^i(x_1, \dots, x_n),$$

der den Gleichungen (6) genügt, der also ein längs jeder Kurve C parallel verschobener Vektor ist. Seine Komponenten sind dann vom Bogen $C_{P_0}^P$, über den parallel verschoben wird, unabhängig. Aus (6) folgt dann

$$(9) \quad \frac{\partial \lambda^i}{\partial x_q} \equiv - \left\{ \begin{matrix} p & q \\ & i \end{matrix} \right\} \lambda^p$$

und weiter

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x_r} \left[\left\{ \begin{matrix} p & q \\ & i \end{matrix} \right\} \lambda^p \right] \equiv \frac{\partial}{\partial x_q} \left[\left\{ \begin{matrix} p & r \\ & i \end{matrix} \right\} \lambda^p \right],$$

also

$$(10^*) \quad \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ \begin{matrix} pq \\ i \end{matrix} \right\} \lambda^p - \left\{ \begin{matrix} pq \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} tr \\ p \end{matrix} \right\} \lambda^t \equiv \frac{\partial}{\partial x_q} \left\{ \begin{matrix} pr \\ i \end{matrix} \right\} \lambda^p - \left\{ \begin{matrix} pr \\ i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} tq \\ p \end{matrix} \right\} \lambda^t$$

und endlich

$$(11) \quad 0 \equiv R^i{}_{trq} \lambda^t,$$

wo

$$(12) \quad R^i{}_{trq} = \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ \begin{matrix} tq \\ i \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_q} \left\{ \begin{matrix} tr \\ i \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} tq \\ p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} pr \\ i \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} tr \\ p \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} pq \\ i \end{matrix} \right\}$$

(wie sofort gezeigt wird) ein Tensor der angeschriebenen Art ist, der als *Krümmungstensor des Riemannschen R_n* bezeichnet wird.

Für den eindeutig (d. h. unabhängig vom Bogen $C_{P_0}^P$, über den „parallel“ verschoben wird) parallel verschobenen Vektor (8) ist (11), falls $R^i{}_{trq}$ nicht identisch verschwindet, ein System von Bedingungsgleichungen. Die Vektoren λ^t , die diesen genügen, bilden in jedem Punkte P des R_n einen $n - \rho$ dimensionalen Vektorraum, wenn ρ der Rang des Systems (11) ist. Falls eindeutig parallel verschobene Raumvektoren (8) existieren, so müssen sie diesem Vektorraum angehören. Durch Differentiation der Identitäten (11) nach x_α erhalten wir

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (R^i{}_{trq}) \lambda^t - \left\{ \begin{matrix} p\alpha \\ t \end{matrix} \right\} R^i{}_{trq} \lambda^p$$

oder¹⁾

$$(13) \quad 0 \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (R^i{}_{trq}) - \left\{ \begin{matrix} t\alpha \\ p \end{matrix} \right\} R^i{}_{prq} \right] \lambda^t.$$

Wir sehen also, daß der eindeutig parallel verschobene Vektor λ^t neben (11) auch dem System (13) genügen muß, und ebenso einem weiteren System, zu dem wir durch Differentiation von (13) gelangen usw., bis wir auf ein System stoßen, dessen „Erweiterung“ keine neuen Bedingungsgleichungen mehr für λ^t liefert.

Ist r der Rang des Systems *aller auf diese Weise gefundenen Bedingungsgleichungen für λ^t* (die alle in λ^t homogen linear sind), so ist dadurch in jedem Punkte des R_n ein $n - r$ dimensionaler Vektorraum definiert, der also alle Vektoren enthält, die diesen Bedingungsgleichungen genügen. Dann kann man aber zeigen, daß es zu jeder Anfangslage

$$(14) \quad x_i, \lambda^i,$$

die einem Vektor eines dieser Vektorräume (des Vektorraumes in x_1, \dots, x_n) entspricht, einen eindeutig parallel verschobenen Vektor λ^t gibt, der im Punkte x_i die Anfangslage (14) annimmt. Der Beweis folgt aus einem recht

1) Das System (13) hat erst mit (9) und (11) zusammen tensorielle Bedeutung; das System (11) *tensoriell* nach x_α differenziert, führt wegen (9) und (11) auf (13).

allgemeinen Theorem über Systeme totaler Differentialgleichungen, dessen exakte Durchführung hier allzuviel Platz beanspruchen würde.¹⁾

Der auffallendste Fall ist wohl der extreme, daß die Anfangslage (14) beliebig wählbar ist. Dann können keine einschränkenden Bedingungsgleichungen existieren, es müssen also schon die Komponenten des Krümmungstensors identisch verschwinden. Also ist

$$(15) \quad R^i{}_{trq} \equiv 0$$

notwendig und hinreichend für die Eindeutigkeit der Parallelverschiebung jedes durch seine Anfangslage bestimmten Vektors.

Wir gehen an die nähere Untersuchung der Räume, für die das System (15) gilt. In einem solchen R_n können wir ein eindeutig parallel verschobenes normiertes n -Bein $(\alpha)\lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, n$), konstruieren. Der Maßtensor hat in bezug auf dieses die Darstellung

$$(16) \quad g^{ik} = (\alpha)\lambda^i (\alpha)\lambda^k.$$

Wir bilden, wenn $(\alpha)\lambda_i$ die kovarianten Komponenten der Vektoren des n -Beins sind,

$$(17) \quad \varphi_i(x_1, \dots, x_n) = \int_{P_0}^P (\delta)\lambda_k^i dx_k, \quad (\delta)\lambda_k^i = g_{kj} (\delta)\lambda^j.$$

Da $(\alpha)\lambda_i$ ein parallel verschobener Vektor ist, so gilt

$$(18) \quad \frac{\partial (\delta)\lambda_k^i}{\partial x_j} = \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} (\delta)\lambda_r^i,$$

also²⁾

$$(19) \quad \frac{\partial (\delta)\lambda_k^i}{\partial x_j} - \frac{\partial (\delta)\lambda_j^i}{\partial x_k} = 0.$$

Dies rechtfertigt die Schreibweise für das Integral (17), denn wir wissen nun, daß dieses Integral in der Tat nur eine Funktion der Koordinaten des Punktes P ist. Aus (17) folgt weiter

$$(20) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = (\delta)\lambda_k^i,$$

also

$$(20') \quad \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right| \neq 0.$$

1) Vgl. etwa EISENHART, *Non-riemannian geometry*, New York 1927, S. 15 ff.

2) Es ist von Interesse, daß für jeden eindeutig parallel verschobenen Vektor λ_k der Rotationstensor $\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k}$ verschwindet.

Wegen (18) und (20) ist $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ zweimal stetig differenzierbar. Wir sehen nun

$$(21) \quad \bar{x}_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$$

als eine Koordinatentransformation für die Punkte einer genügend eingeschränkten Umgebung des Punktes P_0 an, die so eng begrenzt sei, daß in ihr das System (21) nach den x_1, \dots, x_n auflösbar ist. P_0 erhält die neuen Koordinaten $\bar{x}_i = 0$. Wir berechnen nun im System \bar{x}_i die Komponenten ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i$ der Vektoren des normierten parallel verschobenen n -Beins; für sie gilt

$$(22) \quad {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} {}_{(\alpha)}\lambda^k = {}_{(i)}\lambda_{ik} {}_{(\alpha)}\lambda^k = \delta_{\alpha i}.$$

Nach (16) erhalten wir im System \bar{x}_i für den Maßtensor \bar{g}^{ik}

$$(23) \quad \bar{g}^{ik} = {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^k = \delta_{\alpha i} \delta_{\alpha k} = \delta_{ik},$$

die *euklidische Maßbestimmung*, d. h. die Maßform des auf rechtwinklig kartesische Koordinaten bezogenen euklidischen R_n . Ist g^{ik} konstant, so besteht auch, da ja $\left\{ \begin{smallmatrix} P & Q \\ i & i \end{smallmatrix} \right\} \equiv 0$ wird, das System (15), das also notwendig und hinreichend dafür ist, daß g_{ik} in die Form $g_{ik} = \delta_{ik}$ gebracht werden kann. *Das Verschwinden des Krümmungstensors, d. h. die Eindeutigkeit der Parallelverschiebung, ist für den euklidischen Raum charakteristisch.*

Für kartesische Koordinaten ($g_{ik} = \text{konst.}$) eines euklidischen R_n gilt für einen parallel verschobenen Vektor (6), (6')

$$(24) \quad d\lambda^i = 0, \quad d\lambda_i = 0,$$

also λ^i (bzw. λ_i) konstant. Wir kommen so zu dem wohlvertrauten Begriff der Parallelverschiebung in euklidischen Räumen.

Es sei in P_0 ein durch ein normiertes r -Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_0^i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) aufgespannter r dimensionaler Vektorraum

$$V^{(r)}(P_0) = \{x_1^0, \dots, x_n^0; {}_{(\alpha)}\lambda_0^1, \dots, {}_{(\alpha)}\lambda_0^n\}$$

gegeben. Sein Projektionstensor ist

$$P_0^{ik} = {}_{(\alpha)}\lambda_0^i {}_{(\alpha)}\lambda_0^k \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

Verschieben wir längs eines Bogens $C_{P_0}^P$ das r -Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_0^i$ parallel, so spannt es in P den längs $C_{P_0}^P$ parallel verschobenen Vektorraum auf. Da $\mathfrak{h}_{(\alpha)}\lambda^i = 0$ längs $C_{P_0}^P$ gilt, so ist auch $\mathfrak{h}p^{ik} = 0$, d. h. der Projektionstensor eines längs eines Bogens $C_{P_0}^P$ parallel verschobenen Vektorraumes ist ein parallel verschobener Tensor. Gilt umgekehrt $\mathfrak{h}p^{ik} = 0$ längs $C_{P_0}^P$ für den Projektionstensor p^{ik} eines längs $C_{P_0}^P$ definierten Vektorraumes $V^{(r)}$, so folgt aus $p_0^{ik} = {}_{(\alpha)}\lambda_0^i {}_{(\alpha)}\lambda_0^k$, wenn wir das normierte r -Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_0^i$ parallel von P_0 nach P verschieben,

daß $p^{ik} = {}_{(\alpha)}\lambda^i {}_{(\alpha)}\lambda^k$ längs des ganzen Bogens $C_{P_0}^P$ ist. Der Vektorraum $V^{(r)}$, der durch jedes r -Bein aufgespannt wird, das in die kanonische Darstellung seines Projektionstensors p^{ik} eintritt, ist also identisch mit dem von P_0 längs $C_{P_0}^P$ parallel verschobenen Vektorraume $V^{(r)}(P_0)$. Charakteristisch für einen längs $C_{P_0}^P$ parallel verschobenen Vektorraum ist demnach, daß sein Projektionstensor p^{ik} ein längs $C_{P_0}^P$ parallel verschobener Tensor ist.

Es kann eintreten, daß in jedem Punkte des R_n ein Vektorraum $V^{(r)}$ existiert, der längs jedes Bogens ein parallel verschobener Vektorraum ist, ohne daß einer seiner Vektoren diese Eigenschaft haben müßte. Die Existenz eines solchen Vektorraumes ist gleichbedeutend mit der Existenz eines Projektionstensors p^{ik} , der eindeutig parallel verschoben ist. Ein Beispiel liefert der Maßtensor g^{ik} , der Projektionstensor des n dimensionalen Vektorraumes $V^{(n)}$.

Ist für eine Kurve des R_n die k te Krümmung Null, so ist der von den Vektoren ${}_{(1)}\xi^i, {}_{(2)}\xi^i, \dots, {}_{(k)}\xi^i$ aufgespannte Vektorraum, der „ $k-1$ te Schmiegerraum $V^{(k)}$ “, längs der Kurve parallel verschoben. Man zeige dies unter Benutzung der FRENETSchen Formeln (III, § 1).¹⁾

§ 2. Eine Reihenentwicklung für die Parallelverschiebung. Der Krümmungstensor.

Wir schreiben statt der Christoffelklammern $\left\{ \begin{smallmatrix} p & q \\ i \end{smallmatrix} \right\}$ das Symbol $-\Gamma_{pq}^i$, betonen aber, daß diese häufig verwendete Schreibart nicht gerade sehr zweckmäßig ist, da die Klammer, der kein tensorieller Charakter zukommt, nunmehr im Gewande eines Tensors auftritt. Aus den Differentialgleichungen

$$(1) \quad d\lambda^i = \Gamma_{pq}^i \lambda^p dx_q$$

für den parallel verschobenen Vektor λ^i , erhält man durch Integration die mit (1) äquivalenten Integralgleichungen

$$(2) \quad \lambda^i(Q) = \lambda^i(P) + \int_P^Q \Gamma_{pq}^i \lambda^p dx_q,$$

denen längs C_P^Q der parallel verschobene Vektor zu genügen hat.

Eine Lösung eines solchen Systems von Integralgleichungen erhält man aus der folgenden Reihenentwicklung. Wir setzen in das Integral rechter Hand in (2) den Wert λ^p ein, wie er sich aus (2) ergibt, und erhalten

$$(2') \quad \lambda^i(Q) = \lambda^i(P) + \lambda^p(P) \int_P^Q \Gamma_{pq}^i dx_q + \int_P^Q \Gamma_{pq}^i dx_q \int_P^{Q_1} \Gamma_{p_1 q_1}^p \lambda^p dx_{q_1}.$$

1) Setzt man $p^{ik} = {}_{(\alpha)}\xi^i {}_{(\alpha)}\xi^k$ ($\alpha = 1, \dots, k$), so ist $\delta p^{ik} = 0$.

Hier wird in das letzte Integral wieder λ^{p_1} aus (2) eingesetzt usw.; es ergeben sich schließlich Reihenentwicklungen

$$(3) \quad \lambda^i(Q) = \lambda^i(P) \left[\delta^i + \int_P^Q \Gamma_{j_1 q}^i dx_a + \int_P^Q \Gamma_{p_2}^i dx_a \int_P^{q_1} \Gamma_{j_1 q_1}^{p_2} dx_{a_1} \right. \\ \left. + \int_P^Q \Gamma_{p_2 q}^i dx_a \int_P^{q_1} \Gamma_{p_1 q_1}^{p_2} dx_{a_1} \int_P^{q_2} \Gamma_{j_2 q_2}^{p_1} dx_{a_2} + \dots \right],$$

die formal dem System (2) genügen und die, wenn wir ihre *gleichmäßige Konvergenz* längs jedes Kurvenbogens endlicher Länge nachweisen, für jeden solchen Bogen tatsächlich eine Lösung von (2) darstellen, da sich die Reihen (3) dann gliedweise integrieren lassen.

Mit s sei die von P aus gemessene Bogenlänge auf dem Bogen C_P^Q bezeichnet. Dann ist $dx_a = x'_a ds$ und x'_a ein Einheitsvektor. Aus der kanonischen Darstellung $g^{ik} = (\alpha)_s^i (\alpha)_s^k$ des Maßtensors folgt $g^{ii} \geq (\xi^i)^2$ für Einheitsvektoren ξ^i , also (nicht summieren über i !)

$$(4) \quad |\sqrt{g^{ii}}| \geq |\xi^i|.$$

Somit liegen die absoluten Beträge $|x'_i|$ unter einer gemeinsamen endlichen Schranke, die mit X bezeichnet sei. Dabei ist der Bereich des R_n , in welchen wir den Bogen C_P^Q legen, als abgeschlossen vorausgesetzt und in ihm g_{ik} (und g^{ik}) als stetig. Wenn wir noch weiter die Stetigkeit der Ableitungen des Maßtensors in diesem Bereiche fordern, so ist auch $\Gamma_{j_2}^i$ stetig und auch die $|\Gamma_{j_2}^i|$ liegen unter einer endlichen Schranke M . Wenn wir mit S das Integral $\int_P^Q ds$ bezeichnen, so gelten die Ungleichungen

$$(5) \quad \left| \int_P^Q \Gamma_{j_2}^i dx_a \right| < nMXS,$$

$$(5') \quad \left| \int_P^Q \Gamma_{p_2}^i dx_a \int_P^{q_1} \Gamma_{j_1 q_1}^{p_2} dx_{a_1} \right| < nMX \int_P^Q |\Gamma_{p_2}^i| |x'_a| s ds < \frac{n^2 M^2 X^2 S^2}{2},$$

$$(5'') \quad \left| \int_P^Q \Gamma_{p_2 q}^i dx_a \int_P^{q_1} \Gamma_{p_1 q_1}^{p_2} dx_{a_1} \int_P^{q_2} \Gamma_{j_2 q_2}^{p_1} dx_{a_2} \right| \\ < \frac{n^2 M^2 X^2}{2} \int_P^Q |\Gamma_{p_2}^i| |x'_a| s^2 ds < \frac{n^3 M^3 X^3 S^3}{3!}$$

usw. Die Reihe (3) konvergiert somit längs eines jeden Bogens endlicher Länge gleichmäßig und ist daher eine Lösung von (2).

Bevor wir eine interessante Anwendung für die von uns gegebene Reihenentwicklung bringen, müssen wir uns mit dem im vorhergehenden Paragraphen aufgetretenen Krümmungstensor näher befassen. Als erstes haben wir den Nachweis zu erbringen, daß es sich wirklich um einen Tensor handelt. Im Punkte P und einer Umgebung $\mathcal{U}(P)$ sei der zweimal stetig differenzierbare kovariante Vektor φ_i definiert. Wir bilden dann $\frac{\delta \varphi_i}{\delta x_k}$ und weiter $\frac{\delta}{\delta x_l} \left(\frac{\delta \varphi_i}{\delta x_k} \right) = \frac{\delta^2 \varphi_i}{\delta x_l \delta x_k}$.

Endlich bilden wir den in den Indizes l und k schiefssymmetrischen Tensor $\frac{\delta^2 \varphi_i}{\delta x_l \delta x_k} - \frac{\delta^2 \varphi_i}{\delta x_k \delta x_l}$, dessen expliziter Ausdruck uns den gewünschten Nachweis liefert. Setzen wir

$$(6) \quad \varphi_{ik} = \frac{\delta \varphi_i}{\delta x_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \varphi_r,$$

so ist

$$(6') \quad \frac{\delta \varphi_{ik}}{\delta x_l} = \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_l} - \left\{ \begin{matrix} il \\ r \end{matrix} \right\} \varphi_{rk} - \left\{ \begin{matrix} kl \\ r \end{matrix} \right\} \varphi_{ir},$$

oder

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\delta^2 \varphi_i}{\delta x_l \delta x_k} &= \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_l \partial x_k} - \varphi_r \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_l} - \left\{ \begin{matrix} il \\ r \end{matrix} \right\} \varphi_{rk} - \left\{ \begin{matrix} kl \\ r \end{matrix} \right\} \varphi_{ir} \\ &= \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_l \partial x_k} - \varphi_r \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \left[\varphi_{rl} + \left\{ \begin{matrix} rl \\ s \end{matrix} \right\} \varphi_s \right] - \left\{ \begin{matrix} il \\ r \end{matrix} \right\} \varphi_{rk} - \left\{ \begin{matrix} kl \\ r \end{matrix} \right\} \varphi_{ir}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(8) \quad \frac{\delta^2 \varphi_i}{\delta x_l \delta x_k} - \frac{\delta^2 \varphi_i}{\delta x_k \delta x_l} = \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} il \\ r \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} il \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} sk \\ r \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} sl \\ r \end{matrix} \right\} \right] \varphi_r$$

oder wegen (1, 12)

$$(9) \quad \frac{\delta^2 \varphi_i}{\delta x_l \delta x_k} - \frac{\delta^2 \varphi_i}{\delta x_k \delta x_l} = R^r{}_{,ikl} \varphi_r.$$

Bemerkt sei, daß (9) mit $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_l \partial x_k}$ äquivalent ist, eine Tatsache, von der wir später Gebrauch machen werden.

In (9) steht links ein Tensor von der Art $T_{,ikl}$; da also für einen beliebigen kovarianten Vektor φ_r auch die rechte Seite ein solcher Tensor ist, so ist $R^r{}_{,ikl}$ ein einfach kontravarianter, dreifach kovarianter Tensor vierter Stufe. Mit $R_{j,ikl}$ bezeichnen wir den in allen Indizes kovarianten Tensor vierter Stufe (kovarianter Krümmungstensor)

$$(10) \quad R_{j,ikl} = g_{jr} R^r{}_{,ikl}.$$

Wegen $\left\{ \begin{matrix} il \\ r \end{matrix} \right\} g_{jr} = \left[\begin{matrix} il \\ j \end{matrix} \right]$ erhalten wir

$$(11) \quad R_{j,ikl} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\begin{matrix} il \\ j \end{matrix} \right] - \left\{ \begin{matrix} il \\ r \end{matrix} \right\} \frac{\partial g_{jr}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\begin{matrix} ik \\ j \end{matrix} \right] + \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \frac{\partial g_{jr}}{\partial x_l} + \left\{ \begin{matrix} il \\ s \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} sk \\ j \end{matrix} \right] - \left\{ \begin{matrix} ik \\ s \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} sl \\ j \end{matrix} \right]$$

oder

$$(11') \quad R_{j i k l} = \frac{\partial}{\partial x_k} [{}^i l_j] - \frac{\partial}{\partial x_l} [{}^i k_j] - \{r\} \left(\frac{\partial g_{j r}}{\partial x_k} - [{}^r k_j] \right) + \{r\} \left(\frac{\partial g_{j r}}{\partial x_l} - [{}^r l_j] \right).$$

Wegen $[{}^r k_j] + [{}^i k_r] = \frac{\partial g_{i r}}{\partial x_k}$ gilt weiter

$$(11'') \quad R_{j i k l} = \frac{\partial}{\partial x_k} [{}^i l_j] - \frac{\partial}{\partial x_l} [{}^i k_j] - \{r\} [{}^j k_r] + \{r\} [{}^j l_r].$$

Eine ganz einfache Rechnung ergibt endlich

$$(12) \quad R_{j i k l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{i k}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{j l}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{i l}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{j k}}{\partial x_i \partial x_l} \right) - g^{r t} \left([{}^j k_r] [{}^i l_t] - [{}^j l_r] [{}^i k_t] \right).$$

An dieser Formel bestätigt man sofort die Relationen

$$(13) \quad \begin{cases} R_{i k l m} = -R_{i k m l} = -R_{k i l m} = R_{k i m l}, \\ R_{i k l m} = R_{l m i k}, \\ R_{i k l m} + R_{i l m k} + R_{i m k l} = 0. \end{cases}$$

Gelten für einen Tensor $S_{i j k l}$ die Relationen

$$(13') \quad \begin{cases} S_{i j k l} = -S_{j i k l}, \quad S_{i j k l} = S_{k l i j}, \\ S_{i j k l} + S_{i k l j} + S_{i l j k} = 0, \end{cases}$$

so sind seine Komponenten durch die quadratische Form

$$(14) \quad S_{i j k l} \Delta^{i j} \Delta^{k l}$$

beliebiger PLÜCKER-TENSOREN $\Delta^{i j} = \varrho^i \sigma^j - \varrho^j \sigma^i$ eindeutig bestimmt, oder, was dasselbe besagt, aus dem Verschwinden der quadratischen Form (14) für jeden PLÜCKERSCHEN Tensor folgt $S_{i j k l} = 0$.

In der Tat gilt dann für beliebige Vektoren ϱ^i, σ^i

$$(15) \quad 0 = S_{i j k l} \varrho^i \varrho^k \sigma^j \sigma^l,$$

d. h.

$$(16) \quad 0 = S_{i j k l} + S_{k j i l} + S_{i l k j} + S_{k l i j},$$

also wegen (13')

$$(16') \quad 0 = S_{i j k l} + S_{i l k j}$$

oder

$$(16'') \quad S_{i j k l} = S_{i l j k}.$$

Somit ist $S_{i j k l} = S_{i l j k} = S_{i k l j}$ also wegen (13') $S_{i j k l} = 0$, w. z. b. w.

Ein Beispiel für einen solchen Tensor ist der Krümmungstensor, ein zweites der Tensor

$$(17) \quad g_{i k} g_{j l} - g_{i l} g_{j k}.$$

Sind Δ^{ij} die PLÜCKERSchen Koordinaten eines zweidimensionalen Vektorraumes λ^i, μ^j eines Punktes P , so nennt man die Invariante

$$(18) \quad k(\Delta^{ij}) = \frac{R_{ijkl} \Delta^{ij} \Delta^{kl}}{(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) \Delta^{ij} \Delta^{kl}}$$

die Riemannsche Krümmung des R_n für die F_2 -Richtung λ^i, μ^j . Da sich die Tensoren in Zähler und Nenner von (18) gegenüber Indizesvertauschungen nach (18') verhalten, so kann man rechts entweder in üblicher Art oder über die verschiedenen Kombinationen ij bzw. kl summieren.

Der euklidische R_n hat in jedem Punkte für jede Richtung die Krümmung Null. Neben diesem haben jene Räume die Geometer am meisten beschäftigt, deren Krümmung konstant, d. h. von Punkt und Richtung unabhängig ist. Es sind dies die Räume konstanter Riemannscher Krümmung, auf die wir noch sehr eingehend zu sprechen kommen.

Der Wert der konstanten Krümmung k heißt die Krümmung des betreffenden Raumes. Ist $k = 0$, ist also der Raum von der Krümmung Null, so muß

$$(19) \quad R_{ijkl} \Delta^{ij} \Delta^{kl} \equiv 0$$

für jeden PLÜCKERSchen Tensor Δ^{ij} , d. h. nach der eben angeführten Überlegung $R_{ijkl} = 0$ sein. Der euklidische R_n ist damit als Riemannscher R_n verschwindender Krümmung gekennzeichnet. Ist k konstant und ungleich Null, so tritt an Stelle von (19)

$$(20) \quad [R_{ijkl} - k(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})] \Delta^{ij} \Delta^{kl} \equiv 0$$

für jeden PLÜCKERSchen Tensor Δ^{ij} . Es muß, da $R_{ijkl} - k(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})$ ebenfalls ein Tensor mit den Symmetrieeigenschaften (13') ist,

$$(21) \quad R_{ijkl} = k(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})$$

sein; diese Form des Krümmungstensors ist charakteristisch für die Räume konstanter Krümmung.

Für den Krümmungstensor gelten die wichtigen Relationen

$$(22) \quad \frac{\partial R^r_{\ ijk}}{\partial x_i} + \frac{\partial R^r_{\ ikl}}{\partial x_j} + \frac{\partial R^r_{\ ilj}}{\partial x_k} = 0$$

oder

$$(22') \quad \frac{\partial R_r_{\ ijk}}{\partial x_i} + \frac{\partial R_r_{\ ikl}}{\partial x_j} + \frac{\partial R_r_{\ ilj}}{\partial x_k} = 0$$

(Identitäten von Bianchi). Die Tensorrelationen (22) und damit auch (22') sind sicher richtig, sobald wir ihre Gültigkeit in irgendeinem Bezugssystem nachzuweisen vermögen. Wir haben anlässlich der Behandlung der RIEMANNschen

Normalkoordinaten die Definition eines in einem Punkte P geodätischen Koordinatensystems gegeben und gezeigt, daß die Normalkoordinaten in ihrem Zentrum geodätisch sind. Wir wiederholen: Ein Koordinatensystem heißt in P geodätisch, wenn in P die $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}$ oder, was dasselbe besagt, die Christoffelklammern verschwinden. Wir bringen nun den Nachweis der Richtigkeit der Relation (22) im betrachteten Punkte P des R_n , indem wir ein in P geodätisches Koordinatensystem zugrunde legen. Dann gilt in P

$$(23) \quad \frac{\delta R_{.ijk}}{\delta x_l} = \frac{\partial R_{.ijk}}{\partial x_l}$$

oder wegen (1, 12)

$$(24) \quad \frac{\delta R_{.ijk}}{\delta x_l} = \frac{\partial^2 \left\{ \begin{smallmatrix} ik \\ r \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \left\{ \begin{smallmatrix} ij \\ r \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_k \partial x_l};$$

mit Hilfe dieses Ausdruckes ist die Richtigkeit von (22) unmittelbar nachzuweisen¹⁾.

Wir führen (für Tensoren $T_{.}$, die in allen Punkten des R_n zweimal stetig differenzierbar sind) als neue Operation ein

$$\Delta_{ki}(T_{.}) = \frac{\delta^2 T_{.}}{\delta x_k \delta x_l} - \frac{\delta^2 T_{.}}{\delta x_l \delta x_k}.$$

1) Ein R_n heißt in einem Punkt P isotrop, wenn die Krümmung (18) in jeder F_2 -Richtung Δ^{ij} durch P konstant ist. Ein R_n konstanter Krümmung ist in jedem Punkt isotrop, aber auch umgekehrt folgt für $n > 2$ aus der Isotropie eines R_n in jedem Punkt, daß er ein R_n konstanter Krümmung ist. Für $n = 2$ ist die Behauptung natürlich unrichtig; für $n > 2$ folgt, wenn wir

$$R_{ijkl} = k(x_1, \dots, x_n) (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

in die Identität (22) einsetzen, wegen $\delta g_{ik} = 0$, $\delta k = dk$

$$\frac{\partial k}{\partial x_h} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) + \frac{\partial k}{\partial x_k} (g_{il}g_{jh} - g_{lh}g_{ji}) + \frac{\partial k}{\partial x_l} (g_{lh}g_{jk} - g_{lk}g_{jh}) = 0$$

und daraus durch Überschiebung mit g^{lj} (es ist $g^{lj}g_{lj} = n$)

$$\frac{\partial k}{\partial x_h} (ng_{ik} - g_{ik}) + \frac{\partial k}{\partial x_k} (g_{ih} - ng_{ih}) + \frac{\partial k}{\partial x_k} g_{ih} - \frac{\partial k}{\partial x_h} g_{ik} = 0$$

$$\text{oder } (n > 2) \quad \frac{\partial k}{\partial x_h} g_{ik} - \frac{\partial k}{\partial x_k} g_{ih} = 0.$$

Ziehen wir den Index i hinauf, so ergibt sich

$$\frac{\partial k}{\partial x_h} \delta_k^i - \frac{\partial k}{\partial x_k} \delta_i^h = 0;$$

setzen wir hier $i = k \neq h$ bei beliebigem h , was wegen $n > 2$ möglich ist, so folgt $\frac{\partial k}{\partial x_h} = 0$, also $k = \text{konst.}$, w. z. b. w.

Es gelten die Regeln, die wir ohne den ganz einfachen Beweis nur anschreiben:

$$(25) \quad \Delta_{kl}(U + V) = \Delta_{kl}(U) + \Delta_{kl}(V)$$

(für gleichartige Tensoren);

$$(26) \quad \Delta_{kl}(UV) = U\Delta_{kl}(V) + V\Delta_{kl}(U).$$

Weiter ist

$$(27) \quad \Delta_{kl}(\varphi) = 0,$$

sobald φ ein Skalar ist. Die Relation (9) lautet jetzt

$$(28) \quad \Delta_{kl}(\varphi_i) = + R^r{}_{ilk}\varphi_r,$$

also nach Überschiebung mit g^{ij}

$$(29) \quad \Delta_{kl}(\varphi^j) = R^r{}_{ilk}\varphi^r g^{kj} = - R^j{}_{rik}\varphi^r.$$

Aus (27), (28), (29) und den Regeln (25), (26) sind wir imstande, das Operationsresultat $\Delta_{kl}(T^{\cdot})$ für jeden Tensor T^{\cdot} anzugeben, wenn wir T^{\cdot} durch irgendein n -Bein darstellen.

Eine manchmal brauchbare Darstellung der $R^j{}_{ikl}$ in einem normierten n -Bein $(\alpha)\mu_i$ ergibt sich mittels der am Schluß von III, § 1 eingeführten Bezeichnungen. Aus (III, 1, 21) folgt nämlich

$$\Delta_{lk}(\alpha)\mu_i = \left[\frac{\partial(\alpha\beta)C_k}{\partial x_l} - \frac{\partial(\alpha\beta)C_l}{\partial x_k} + (\alpha\gamma)C_k(\gamma\beta)C_l - (\alpha\gamma)C_l(\gamma\beta)C_k \right] (\beta)\mu_i = (\alpha\beta)Y_{kl}(\beta)\mu_i,$$

wenn wir den Klammerausdruck rechts kurz mit $(\alpha\beta)Y_{kl}$ bezeichnen. Andererseits ist aber

$$\Delta_{lk}(\alpha)\mu_i = R^h{}_{ikl}(\alpha)\mu_h,$$

so daß

$$R^h{}_{ikl}(\alpha)\mu_h = (\alpha\beta)Y_{kl}(\beta)\mu_i$$

wird; durch Überschiebung mit $(\alpha)\mu_j$ folgt daraus wegen $(\alpha)\mu_j(\alpha)\mu_h = g_{jh}$

$$(30) \quad R^j{}_{ikl} = (\alpha\beta)Y_{kl}(\alpha)\mu_j(\beta)\mu_i.$$

Wir greifen jetzt wieder auf die Reihenentwicklung (8) zurück, die wir

$$(31) \quad \lambda^i(Q) = \lambda^j(P)[\delta^i_j + K^j{}_i(C_P^Q)]$$

schreiben, wo

$$(32) \quad K^j{}_i(C_P^Q) = \int_P^Q \Gamma^i{}_{j_1} d x_{j_1} + \int_P^Q \Gamma^i{}_{j_2} d x_{j_2} \int_P^{j_1} \Gamma^j{}_{j_1} d x_{j_1} \\ + \int_P^Q \Gamma^i{}_{j_2} d x_{j_2} \int_P^{j_1} \Gamma^j{}_{j_1} d x_{j_1} \int_P^{j_2} \Gamma^j{}_{j_2} d x_{j_2} + \dots$$

ist, und berechnen für einen geschlossenen doppeltpunktfreien¹⁾ Kurvenbogen C_P^P den Wert $K_j^i(C_P^P)$. Diesen Kurvenbogen denken wir uns in der Form

$$(33) \quad x_i - x_i^0 = \varepsilon \alpha_i(t) + \varepsilon^2 \dots$$

gegeben; er soll also von einem Parameter ε so abhängen, daß er für $\lim \varepsilon = 0$ auf den Punkt $P(x_i^0)$ zusammenschumpft. Die Parameterwerte $t=0$ und $t=1$ mögen dem Punkte P entsprechen. Wir führen unsere Rechnung durch bis zu den Gliedern in ε^2 . Wir bezeichnen $x_i - x_i^0$ mit \bar{x}_i und Glieder, die ε^3 als Faktor haben, mit (ε^3) . Es ist

$$\begin{aligned} \int_P^P \Gamma'_{j,k} dx_k &= \int_P^P \left[\Gamma_{j,k}^i(P) + \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i(P)}{\partial x_i} \bar{x}_i + \dots \right] dx_k = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i(P)}{\partial x_i} \int_P^P \bar{x}_i dx_k + (\varepsilon^3), \\ \int_P^P \Gamma_{j_1, k_1}^i dx_{k_1} \int_P^{Q_1} \Gamma_{j_2, k_2}^{j_1} dx_{k_2} &= \int_P^P \left[\Gamma_{j_1, k_1}^i(P) + \dots \right] dx_{k_1} \int_P^{Q_1} \left[\Gamma_{j_2, k_2}^{j_1}(P) + \dots \right] dx_{k_2} \\ &= \Gamma_{j_1, k_1}^i(P) \Gamma_{j_2, k_2}^{j_1}(P) \int_P^P \bar{x}_k dx_{k_1} + (\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Wir haben demnach

$$(34) \quad K_j^i(C_P^P) = \left(\frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial x_i} + \Gamma_{j_1, k}^{j_1} \Gamma_{j_2, k}^{j_1} \right) \int_P^P \bar{x}_i dx_k + (\varepsilon^3).$$

Aus
$$0 = \int_P^P d(\bar{x}_k \bar{x}_i) = \int_P^P \bar{x}_k dx_i + \int_P^P \bar{x}_i dx_k$$

folgt dann²⁾

$$(35) \quad K_j^i(C_P^P) = -\frac{1}{2} R_{j_1, k}^i(P) \int_P^P \bar{x}_i dx_k + (\varepsilon^3).$$

Die einparametrische Kurvenschar (33) liege auf der F_2

$$(36) \quad x_i = x_i(u, v)$$

und sei in dieser durch

$$(36') \quad u = \varepsilon \alpha(t), \quad v = \varepsilon \beta(t)$$

definiert.

Für $t=0$ und $t=1$ mögen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ verschwinden, $x_i(0, 0)$ ist also der Punkt P . In P bestehe die Entwicklung

$$(37) \quad x_i(u, v) = x_i(0, 0) + \frac{\partial x_i(0, 0)}{\partial u} u + \frac{\partial x_i(0, 0)}{\partial v} v + \dots,$$

1) Stetigkeit und Differenzierbarkeit der im folgenden auftretenden Funktionen ist dabei im erforderlichen Umfang vorausgesetzt!

2) Es wurde $\left\{ \begin{smallmatrix} P & Q \\ r & r \end{smallmatrix} \right\} = -R_{PQ}^r$ gesetzt, daher das Minuszeichen in (35).

also

$$(38) \quad \bar{x}_i = x_i(t) - x_i(0) = \varepsilon \left[\frac{\partial x_i(0,0)}{\partial u} \alpha(t) + \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial v} \beta(t) \right] + \varepsilon^2 \dots$$

Aus (37) folgt $dx_i = \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial u} du + \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial v} dv + \varepsilon^2 \dots$;

somit ist¹⁾

$$(39) \quad \int_P \bar{x}_i dx_k = \int_P \left(\frac{\partial x_i(0,0)}{\partial u} u + \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial v} v \right) \left(\frac{\partial x_k(0,0)}{\partial u} du + \frac{\partial x_k(0,0)}{\partial v} dv \right) + (\varepsilon^3) \\ = \left(\frac{\partial x_i(0,0)}{\partial u} \frac{\partial x_k(0,0)}{\partial v} - \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial v} \frac{\partial x_k(0,0)}{\partial u} \right) \int_P u dv + (\varepsilon^3).$$

Mit $\gamma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) sei der Maßtensor der F_2 (36) bezeichnet; die Oberfläche, die C_P^2 auf dieser F_2 umrandet, wird durch das Integral

$$(40) \quad O = \int \sqrt{\gamma} du dv,$$

gemessen, wo $\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$ ist. Nun ist

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma_{(P)}} + \left(\frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial u} \right)_{(P)} u + \dots = \sqrt{\gamma_{(P)}} + \varepsilon \dots,$$

somit

$$(41) \quad O = \sqrt{\gamma_{(P)}} \int du dv + (\varepsilon^3).$$

Für das in (41) auftretende Integral gilt aber

$$\int du dv = \pm \int_P u dv,$$

wobei der Umlaufsinn über das Vorzeichen entscheidet. Wir erhalten somit

$$(41') \quad O = \pm \sqrt{\gamma_{(P)}} \int_P u dv + (\varepsilon^3)$$

und weiter wegen (39)

$$(42) \quad \int_P \bar{x}_i dx_k = \pm \frac{\frac{\partial x_i(0,0)}{\partial u} \frac{\partial x_k(0,0)}{\partial v} - \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial v} \frac{\partial x_k(0,0)}{\partial u}}{\sqrt{\gamma_{(P)}}} O + (\varepsilon^3).$$

Ist jetzt ϱ^i, σ^j ein normiertes Zweibein der F_2 (36) in P , so besteht die Darstellung

$$(43) \quad \varrho^i = \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial u} r^1 + \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial v} r^2, \quad \sigma^i = \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial u} \xi^1 + \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial v} \xi^2,$$

1) Da $\int_P u du = \int_P v dv = 0$ und $\int_P u dv = -\int_P v du$ ist.

wo r^α, ξ^α ($\alpha = 1, 2$) die kontravarianten Komponenten des normierten Zweibeins bezüglich der F_2 sind. Dann folgt aus der kanonischen Darstellung $\gamma^{\alpha\beta} = r^\alpha r^\beta + \xi^\alpha \xi^\beta$ des Maßtensors $\gamma^{\alpha\beta}$ durch das Zweibein r^α, ξ^α

$$(44) \quad \frac{1}{\gamma} = \begin{vmatrix} \gamma^{11} & \gamma^{12} \\ \gamma^{21} & \gamma^{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r^1 & r^2 \\ \xi^1 & \xi^2 \end{vmatrix}^2.$$

Somit ist

$$(45) \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma(P)}} \left(\frac{\partial x_l(0,0)}{\partial u} \frac{\partial x_k(0,0)}{\partial v} - \frac{\partial x_k(0,0)}{\partial u} \frac{\partial x_l(0,0)}{\partial v} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_l(00)}{\partial u} & \frac{\partial x_l(00)}{\partial v} \\ \frac{\partial x_k(00)}{\partial u} & \frac{\partial x_k(00)}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r^1 & r^2 \\ \xi^1 & \xi^2 \end{vmatrix} \\ = \varrho^i \sigma^k - \varrho^k \sigma^i = \pi^{ik},$$

wo π^{ik} der normierte PLÜCKERSCHE Tensor der F_2 in P ist. Also gilt

$$(46) \quad \int_P^P \bar{x}_i dx_k = \pm \pi^{ik} O + (\varepsilon^3),$$

eine Formel, die man übrigens auch zur Definition des PLÜCKERSCHE Tensors des Tangentenvektorraumes einer F_2 in einem ihrer Punkte P verwenden kann.

Statt (35) erhalten wir dann

$$(47) \quad K_j^i(C_P^F) = \pm \frac{1}{2} R^i_{jlk} \pi^{lk} O + (\varepsilon^3)$$

und statt (31), wenn wir mit $D\lambda^i$ den Zuwachs von λ^i längs C_P^F bezeichnen,

$$(48) \quad D\lambda^i = \pm \frac{1}{2} R^i_{jlk} \lambda^j \pi^{lk} O + (\varepsilon^3)$$

und weiter

$$(49) \quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{D\lambda^i}{O} = \pm \frac{1}{2} R^i_{jlk} \lambda^j \pi^{lk}.$$

Ausgedrückt durch das Operationssymbol Δ_{kl} können wir (49) auch

$$(50) \quad \lim_{\varepsilon=0} \frac{D\lambda^i}{O} = \pm \frac{1}{2} \Delta_{kl}(\lambda^i) \pi^{lk}$$

schreiben. (Umlauf um ein „infinitesimales Parallelogramm“.)

§ 3. Geodätische Mannigfaltigkeiten und geodätische Koordinaten.

Wir definieren: Eine F_l des R_n heißt in einem ihrer Punkte P_0 geodätisch, wenn die durch P_0 gehenden Geodätischen der F_l die erste Raumkrümmung¹⁾ Null haben. Ist in einem Punkt P_0 des R_n ein normiertes l -Bein $(\omega)\lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, l$) gegeben, so bestimmen alle Geodätischen des R_n , die durch P_0 gehen und deren

1) Raumkrümmung im Gegensatz zur Flächenkrümmung oder geodätischen Krümmung bezüglich der F_l als l dimensionaler RIEMANNSCHE Raum.

Richtungen in P_0 dem Vektorraum $\{({}_\alpha)\lambda^i\}$ angehören, eine in P_0 geodätische F_i , besonderer Art; wir nennen eine solche F_i im engeren Sinn geodätisch.

Wir fragen uns zunächst nach den Relationen, denen eine F_{n-1} zu genügen hat, damit sie in P_0 geodätisch ist. Die entsprechenden Relationen für die allgemeine F_i bringen wir in VII. Es sei

$$(1) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

eine in $P_0(x_i^0)$ geodätische F_{n-1} , so daß $\varphi(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$ ist. Die Kurve

$$(2) \quad x_i = x_i(s)$$

sei eine auf die Bogenlänge s bezogene Flächengeodätische durch P_0 , so daß

$$(3) \quad \varphi(x_1(s), \dots, x_n(s)) \equiv 0$$

ist und die erste Raumnormale $(2)\xi^i$ von (2) auf der F_{n-1} senkrecht steht. Aus (3) folgt durch Differentiation nach s

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (1)\xi^i = 0,$$

wo $(1)\xi^i = \frac{dx_i}{ds}$ der Tangentenvektor von (2) ist, und weiter durch nochmalige (absolute) Differentiation

$$(5) \quad \frac{b^2 \varphi}{b x_i b x_k} (1)\xi^i (1)\xi^k + \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (2)\xi^i = 0.$$

Dabei ist $\frac{1}{\varrho_1}$ die erste Raumkrümmung von (2). In P_0 ist nach Voraussetzung $\frac{1}{\varrho_1} = 0$ für jede Flächengeodätische, also ist (in P_0)

$$(6) \quad \frac{b^2 \varphi}{b x_i b x_k} (1)\xi^i (1)\xi^k = 0$$

eine Folge von (4). Gilt umgekehrt (6) in einem Punkt P_0 , so ist für jede Kurve der F_{n-1} durch P_0

$$(7) \quad \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (2)\xi^i = 0.$$

Für die Flächengeodätischen durch P_0 ist aber $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (2)\xi^i \neq 0$, da $(2)\xi^i$ senkrecht zur F_{n-1} ist, und somit muß $\frac{1}{\varrho_1} = 0$ sein. *Notwendig und hinreichend, damit die F_{n-1} (1) in P_0 geodätisch ist, ist also, daß in P_0 die Relation (6) gilt.*

Wir beweisen den Hilfssatz: *Ist A_{ik} ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe und $A_{ik} \xi^i \xi^k = 0$ eine Folge von $(\alpha)\nu_i \xi^i = 0$ ($\alpha = 1, \dots, t$), wo $(\alpha)\nu_i$ ein kovariantes t -Bein ist, so gilt*

$$(8) \quad A_{ik} = (\alpha)\nu_i (\alpha)\mu_k + (\alpha)\mu_i (\alpha)\nu_k \quad (\alpha = 1, \dots, t).$$

Wir ergänzen ${}_{(\alpha)}\nu_i$ zu einem n -Bein und bezeichnen das adjungierte n -Bein mit ${}_{(\alpha)}\lambda^i$. Dann gilt

$$(9) \quad \begin{aligned} A_{ik} &= {}_{(\alpha\beta)}A {}_{(\alpha)}\nu_i {}_{(\beta)}\nu_k, \\ {}_{(\alpha\beta)}A &= {}_{(\beta\alpha)}A = A_{ik} {}_{(\alpha)}\lambda^i {}_{(\beta)}\lambda^k \end{aligned} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n).$$

Nun ist ${}_{(\sigma)}\nu_i {}_{(\alpha)}\lambda^i = 0$ für $\sigma = 1, \dots, t$ und $\alpha = t+1, \dots, n$, und somit gilt nach Annahme $A_{ik} {}_{(\alpha)}\lambda^i {}_{(\beta)}\lambda^k = 0$ für $\alpha = t+1, \dots, n$ (nicht summieren über α !). Ebenso ist $A_{ik} ({}_{(\alpha)}\lambda^i + {}_{(\beta)}\lambda^i) ({}_{(\alpha)}\lambda^k + {}_{(\beta)}\lambda^k) = 0$ und somit auch $A_{ik} {}_{(\alpha)}\lambda^i {}_{(\beta)}\lambda^k = {}_{(\alpha\beta)}A = 0$ für $\alpha > t$ und $\beta > t$. Setzen wir

$${}_{(\alpha)}\mu_k = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^t {}_{(\alpha\beta)}A {}_{(\beta)}\nu_k + \sum_{\beta=t+1}^n {}_{(\alpha\beta)}A {}_{(\beta)}\nu_k \quad (\alpha = 1, \dots, t),$$

so folgt aus (9) die Relation (8).

Wenden wir diesen Hilfssatz auf (6) an, so folgt, daß das Bestehen von

$$(10) \quad \frac{b^2 \varphi}{b x_i b x_k} = a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

in P_0 ebenfalls charakteristisch für eine in P_0 geodätische F_{n-1} ist. Der in P_0 definierte Vektor a_k hängt dabei wesentlich von der Funktion $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ab.

Wir zeigen, daß es stets eine Darstellung $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ der in P_0 geodätischen F_{n-1} gibt, für die der Vektor a_k verschwindet; eine solche Darstellung der F_{n-1} nennen wir *reduziert*. Ist $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ eine in P_0 und in einer Umgebung von P_0 nicht verschwindende Funktion, so wird in dieser Umgebung

$$(11) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

ebenfalls die F_{n-1} (1) darstellen. Nun ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \varphi, \quad \frac{b^2 \varphi}{b x_i b x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{b^2 \varphi}{b x_i b x_k} \alpha + \frac{b^2 \alpha}{b x_i b x_k} \varphi,$$

also in P_0

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \alpha$$

und

$$(13) \quad \frac{b^2 \varphi}{b x_i b x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \ln \alpha}{\partial x_k} + a_k \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \ln \alpha}{\partial x_i} + a_i \right).$$

Wählen wir also $\ln \alpha$ als stetig differenzierbare Funktion, für die in P_0 $\frac{\partial \ln \alpha}{\partial x_i} = -a_i$ ist, so wird $\frac{b^2 \varphi}{b x_i b x_k} = 0$. Aus $\alpha = e^{\ln \alpha}$ folgt wegen der Stetigkeit von $\ln \alpha$, daß α , wie vorausgesetzt, nicht verschwindet.

Der Vektor a_i des Punktes P_0 ist durch (10) bestimmt. Zur Berechnung der Komponenten benötigt man aber nur einen Teil dieser Gleichungen, z. B., wenn im zugrunde liegenden Koordinatensystem $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \neq 0$ ist, die Gleichungen

$$(14) \quad \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x_k \delta x_n} = a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + a_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \quad (k=1, \dots, n),$$

aus denen

$$(15) \quad a_k = \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}} \left(\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x_k \delta x_n} - a_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right), \quad a_n = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x_n^2} \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}}$$

folgt. Diese Gleichungen gelten zunächst nur in P_0 , definieren aber auch in einer Umgebung von P_0 einen kovarianten Vektor a_i , der stetig ist, wenn φ zweimal stetig differenzierbar ist. Für den so definierten Vektor a_i gilt die Tensorrelation (10) nur in P_0 ; in der Umgebung von P_0 aber ist

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x_i \delta x_k} - a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = A_{ik}(x_1, \dots, x_n)$$

ein stetiger symmetrischer Tensor zweiter Stufe, der in P_0 verschwindet. Wir können daher statt (10) auch

$$(16) \quad \frac{\delta^2 \varphi}{\delta x_i \delta x_k} = a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + A_{ik}$$

schreiben, eine Relation, die in der Umgebung von P_0 gilt. Dabei ist

$$(17) \quad A_{ik}(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$$

(x_i^0 sind die Koordinaten von P_0). Von (10) gelangt man zu (16) und (17), wenn man das Definitionsgebiet von a_i über den Punkt P_0 hinaus (in weitgehend willkürlicher Weise) erweitert.

Wir fragen uns nach einem möglichst einfachen Ausdruck für eine in P_0 geodätische F_{n-1} , die in P_0 den gegebenen Normalenvektor $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i$ hat. Ist die F_{n-1} in reduzierter Darstellung gegeben, so müssen

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x_i \delta x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = 0$$

und die Nebenbedingungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i$

in P_0 gelten. Die einfachste¹⁾ derartige geodätische F_{n-1} ist dann

$$(18) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_i - x_i^0) \left[p_i + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}_0 p_l (x_k - x_k^0) \right].$$

1) „Einfachst“ bezieht sich auf das zugrunde liegende Koordinatensystem; der F_{n-1} kommt natürlich keinerlei „Einfachheit“ zu.

In der Taylorentwicklung für die reduzierte Darstellung jeder anderen in P_0 geodätischen F_{n-1} müssen die Glieder bis zum zweiten Grade in $x_i - x_i^0$ mit (18) übereinstimmen, während alle folgenden willkürlich sind.

Ein Koordinatensystem heißt *geodätisch in einem Punkt P_0 des R_n* , wenn in diesem Koordinatensystem alle Ableitungen $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i}$ des Maßtensors g_{ik} oder, was dasselbe besagt, alle Christoffelklammern $\left\{ \begin{smallmatrix} p q \\ r \end{smallmatrix} \right\}$ im Punkt P_0 verschwinden. Die RIEMANNschen Normalkoordinaten mit dem Ursprung P_0 sind nach (V, 11, 14) in P_0 geodätisch.

Wir suchen zunächst notwendige und hinreichende Bedingungen, damit eine Koordinatentransformation

$$(19) \quad \bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n)$$

zu einem in P_0 geodätischen Koordinatensystem \bar{x}_i führt. Zu diesem Zweck berechnen wir aus (19), $\bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \lambda^k$ und $\flat \bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \flat \lambda^k$ die Transformationsformeln der Klammern $\left\{ \begin{smallmatrix} p q \\ i \end{smallmatrix} \right\}$. Es ist

$$d\bar{\lambda}^i + \left\{ \begin{smallmatrix} p q \\ i \end{smallmatrix} \right\} \bar{\lambda}^p d\bar{x}_q = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \left[d\lambda^k + \left\{ \begin{smallmatrix} p q \\ k \end{smallmatrix} \right\} \lambda^p dx_q \right],$$

aber andererseits auch

$$d\bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} d\lambda^k + \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_k \partial x_l} \lambda^k dx_l,$$

woraus wegen der Willkür der Vektoren λ^k und dx_l

$$(20) \quad - \left\{ \begin{smallmatrix} p q \\ i \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{x}_q}{\partial x_l} = \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_k \partial x_l} - \left\{ \begin{smallmatrix} k l \\ r \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_r} = \frac{\flat^2 \bar{x}_i}{\flat x_k \flat x_l}$$

folgt. Soll daher in P_0 das System \bar{x}_i geodätisch sein, so muß $\left\{ \begin{smallmatrix} p q \\ i \end{smallmatrix} \right\}$ in P_0 und daher auch die linke Seite von (20) in P_0 verschwinden; verschwindet umgekehrt die linke Seite von (20) für alle Kombinationen k, l , so ist wegen $\left| \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_k} \right| \neq 0$ auch $\left\{ \begin{smallmatrix} p q \\ i \end{smallmatrix} \right\} = 0$ in P_0 . Also ist

$$(21) \quad \frac{\flat^2 \bar{x}_i}{\flat x_i \flat x_k} = 0$$

in P_0 notwendig und hinreichend, damit das System \bar{x}_i in P_0 geodätisch ist. Geometrisch bedeutet das, daß die n Koordinatenhyperflächen F_{n-1}

$$(22) \quad x_i^0 - \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n) = 0$$

in P_0 geodätisch sind, und zwar liegt insbesondere die reduzierte Darstellung der in P_0 geodätischen F_{n-1} vor.

In derselben Art, wie wir oben eine in P_0 geodätische F_{n-1} konstruierten, erhalten wir die einfachste Transformation (19) in ein in P_0 geodätisches Koordinatensystem in der Form

$$(23) \quad \bar{x}_i - \bar{x}_i^0 = a_{ik}(x_k - x_k^0) + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} kl \\ r \end{matrix} \right\}_0 a_{ir}(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0),$$

wo die a_{ik} konstant und die Determinante $|a_{ik}| \neq 0$ ist.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, eine Transformation (19) mit der Eigenschaft zu finden, daß das neue Koordinatensystem \bar{x}_i längs der Kurve C

$$(24) \quad x_i = \alpha_i(s)$$

geodätisch ist¹⁾; s sei dabei wieder die Bogenlänge auf C . Es muß dann für die Funktionen $\bar{x}_i(x_1, \dots, x_n)$ in (19)

$$(25) \quad \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_k \partial x_l} = 0$$

in allen Punkten von C gelten. Betrachten wir die einparametrische Schar von F_{n-1} (i festgehalten)

$$(26) \quad \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_i,$$

so ist

$$(27) \quad (i)p_k = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}$$

der kovariante Normalenvektor dieser F_{n-1} -Schar. Längs C gilt wegen (25)

$$(28) \quad \frac{\partial (i)p_k}{\partial s} = \frac{\partial (i)p_k}{\partial x_l} \frac{dx_l}{ds} = \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_k \partial x_l} \frac{dx_l}{ds} = 0,$$

also ist der Normalenvektor (27) ein längs C parallel verschobener Vektor. Aus (25) folgt ferner, daß jede F_{n-1} der Schar (26) im Punkt $x_i(s)$ geodätisch ist. Zur Konstruktion des gesuchten Koordinatensystems haben wir, wie jetzt gezeigt wird, nur n derartige F_{n-1} -Scharen ($i = 1, \dots, n$) aufzustellen.

Zum Beweise sei $p_i(s)$ ein längs C parallelverschobener Vektor, so daß

$$(29) \quad p_i' - \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} p_r \alpha_k' = 0$$

ist. Als wesentliche Einschränkung gelte noch

$$(30) \quad p_i \alpha_i' \neq 0,$$

d. h. p_i sei in keinem Punkte des betrachteten Kurvenstückes C ein Normalenvektor desselben. In jedem Punkt P von C konstruieren wir dann eine in P geodätische F_{n-1}

$$(31) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi,$$

1) Die Existenz solcher längs einer Kurve geodätischer Koordinatensysteme wurde zuerst von FERMI nachgewiesen; vgl. T. LEVI-CIVITA, *Der absolute Differentialkalkül* (Berlin 1928), S. 84.

deren Normalenvektor in P der Vektor p_i ist. In allen Punkten von C ist dann

$$(32) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

und

$$(33) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \pi p_i, \quad \pi \neq 0.$$

Durch eine geeignete Transformation $\Phi = \Phi(\varphi)$ können wir erreichen, daß $\pi = 1$ wird. In der Tat folgt aus (30) und (33) $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \alpha_i' \neq 0$, d. h. $\frac{d\varphi}{ds} \neq 0$, so daß sich die Punkte von C durch den Parameter φ charakterisieren lassen; $\varphi = \varphi(s)$ ist dann nach s auflösbar: $s = s(\varphi)$. Nun ist

$$(34) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi' \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \Phi' \pi p_i.$$

Setzt man

$$(35) \quad \Phi(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\pi(\varphi)},$$

so ist $\Phi' = \frac{1}{\pi}$, also, wie behauptet, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = p_i$. Wir schreiben wieder φ statt Φ , d. h. es sei bereits in (33) $\pi = 1$. Dann folgt aus (33) wegen (29)

$$(36) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \alpha_k' = \frac{\partial p_i}{\partial s} = 0,$$

d. h. wegen (32)

$$(37) \quad a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \alpha_k' + a_k \alpha_k' \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0.$$

Da $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \alpha_i' = p_i \alpha_i' \neq 0$ ist, kann man statt (37) auch

$$(38) \quad a_i = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

schreiben. Hier muß aber $\varrho = 0$ sein, da wegen (37) sonst $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \alpha_k' = 0$, also $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \alpha_i' = 0$ wäre in Widerspruch mit (30). Damit ist gezeigt, daß $a_i = 0$ sein muß und daß längs C (an Stelle von (32) und (33))

$$(39) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i$$

gilt. Nehmen wir nun an Stelle des einen Vektors p_i die n Vektoren $(\alpha)p_i$ eines längs C parallelverschobenen n -Beins, wobei nur für alle Indizes α

$$(40) \quad (\alpha)p_i \alpha_i' \neq 0$$

sein muß, so erhalten wir n Funktionen $\varphi_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_\alpha(x_1, \dots, x_n)$, für die $\frac{\partial^2 \bar{x}_\alpha}{\partial x_k \partial x_l} = 0$ ist in den Punkten von C , so daß dann $\bar{x}_\alpha = \bar{x}_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ ein in allen Punkten von C geodätisches Koordinatensystem ist.

Es wird nützlich sein, dieses Verfahren nun rechnerisch genauer zu verfolgen.¹⁾ In

$$(41) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n, s) = [x_i - \alpha_i(s)] \left[p_i(s) + \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}_s p_l(s) \frac{x_k - \alpha_k(s)}{2} \right]$$

haben wir eine einparametrische F_{n-1} -Schar, deren Einzelflächen in den Punkten von C geodätisch sind. An der Stelle $x_i = \alpha_i(s)$, $s = s$ ist $\varphi(x_1, \dots, x_n, s) = 0$, aber wegen (30)

$$(42) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \alpha'_i p_i \neq 0.$$

Somit kann man $\varphi(x_1, \dots, x_n, s) = 0$ in einer Umgebung dieser Stelle nach s auflösen:

$$(43) \quad s = s(x_1, \dots, x_n),$$

womit die Schar (31) gewonnen ist.²⁾ Tragen wir (43) in (41) ein, so ergibt sich eine Identität in den x_i , aus der wir durch Differentiation nach x_h

$$(44) \quad 0 \equiv \left(\delta_{ih} - \alpha'_i \frac{\partial s}{\partial x_h} \right) \left[p_i + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}_s p_l (x_k - \alpha_k) \right] \\ + (x_i - \alpha_i) \left[p'_i \frac{\partial s}{\partial x_h} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}_s p_l \left(\delta_{kh} - \alpha'_k \frac{\partial s}{\partial x_h} \right) + (x_k - \alpha_k) \dots \right]$$

erhalten. Längs C , wo $x_i = \alpha_i(s)$ ist, gilt daher

$$(45) \quad p_h = \alpha'_i p_i \frac{\partial s}{\partial x_h}$$

in Übereinstimmung mit (33) ($\pi = \frac{1}{\alpha'_i p_i}$). Wir differenzieren (44) nochmals nach x_j , berücksichtigen dabei aber nur die Glieder, die längs C nicht verschwinden. Es folgt

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \equiv -\alpha''_i \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j} p_i - \alpha'_i \frac{\partial^2 s}{\partial x_h \partial x_j} p_i + \left(\delta_{ih} - \alpha'_i \frac{\partial s}{\partial x_h} \right) p'_i \frac{\partial s}{\partial x_j} \\ \quad + \frac{1}{2} \left(\delta_{ih} - \alpha'_i \frac{\partial s}{\partial x_h} \right) \left(\delta_{kj} - \alpha'_k \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}_s p_l + \left(\delta_{ij} - \alpha'_i \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) p'_i \frac{\partial s}{\partial x_h} \\ \quad + \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \alpha'_i \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) \left(\delta_{kh} - \alpha'_k \frac{\partial s}{\partial x_h} \right) \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}_s p_l + \dots \\ \equiv -\alpha''_i p_i \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j} - \alpha'_i p_i \frac{\partial^2 s}{\partial x_h \partial x_j} - \alpha'_i p'_i \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j} + A + \dots, \end{array} \right.$$

wo

$$(47) \quad A = p'_h \frac{\partial s}{\partial x_j} + \left[\left\{ \begin{matrix} hj \\ l \end{matrix} \right\}_s p_l - \left\{ \begin{matrix} hk \\ l \end{matrix} \right\}_s p_l \alpha'_k \frac{\partial s}{\partial x_j} - \left\{ \begin{matrix} ij \\ l \end{matrix} \right\}_s p_l \alpha'_i \frac{\partial s}{\partial x_h} \right. \\ \left. + \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}_s p_l \alpha'_i \alpha'_k \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right] + p'_j \frac{\partial s}{\partial x_h} - \alpha'_i p'_i \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j}$$

1) Es handelt sich dabei in erster Linie um den Nachweis der Existenz der Schar (31).

2) Damit ist der erwähnte Nachweis geliefert; die weitere Rechnung bringt eigentlich keinerlei neue Einsichten.

oder wegen $p_i' = \left\{ \begin{smallmatrix} ik \\ l \end{smallmatrix} \right\}_s p_l \alpha_k'$ und (45)

$$(48) \quad A = \left\{ \begin{smallmatrix} hj \\ l \end{smallmatrix} \right\}_s p_l = \left\{ \begin{smallmatrix} hj \\ l \end{smallmatrix} \right\}_s \alpha_i' p_i \frac{\partial s}{\partial x_l}$$

ist. An Stelle von (46) erhalten wir somit

$$(49) \quad 0 \equiv \alpha_i' p_i \frac{\partial^2 s}{\partial x_h \partial x_j} + (\alpha_i' p_i)' \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j}$$

in den Punkten von C . Ist $\alpha_i' p_i$ konstant, so ist $\frac{\partial^2 s}{\partial x_h \partial x_j} = 0$; andernfalls suchen wir eine Transformation $S = S(s)$, so daß $\frac{\partial^2 S}{\partial x_h \partial x_j} = 0$ wird. Aus $\frac{\partial S}{\partial x_h} = S' \frac{\partial s}{\partial x_h}$ und $\frac{\partial^2 S}{\partial x_h \partial x_j} = S'' \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j} + S' \frac{\partial^2 s}{\partial x_h \partial x_j}$ folgt

$$(50) \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x_h \partial x_j} = \left[S'' - \frac{(\alpha_i' p_i)'}{\alpha_i' p_i} S' \right] \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j};$$

wir müssen daher nur

$$(51) \quad S = \int^s \alpha_i' p_i ds$$

setzen, damit $\frac{\partial^2 S}{\partial x_h \partial x_j} = 0$ wird. In Übereinstimmung mit (33), $\pi = 1$, ist dann auch $\frac{\partial S}{\partial x_h} = \alpha_i' p_i \frac{\partial s}{\partial x_h} = p_h$.

§ 4. Ebenen im R_n . Räume konstanter Krümmung.

Wir definieren: *Eine l-dimensionale Hyperfläche F_l des R_n heißt Ebene (und wird dann mit E_l bezeichnet), wenn sie jede Raumgeodätische (Geodätische des R_n) ganz enthält, mit der sie ein Linienelement (Punkt und Richtung) gemeinsam hat.* Mit dieser auch inhaltlich äquivalent ist die folgende Definition:

Eine F_l des R_n ist eine Ebene E_l , wenn jede Flächengeodätische (Geodätische der F_l) zugleich Raumgeodätische ist. Daß jede in der F_l liegende Raumgeodätische zugleich Flächengeodätische ist, folgt aus der Definition der Geodätischen als Extremalen (V, § 2). Durch ein Linienelement der F_l ist eindeutig eine Flächengeodätische und eine Raumgeodätische bestimmt; sind die beiden identisch, so enthält die F_l die ganze Raumgeodätische und umgekehrt.

Daraus folgt, daß die erste Raumkrümmung aller Geodätischen einer E_l verschwindet; somit ist *eine E_l in jedem ihrer Punkte geodätisch* (§ 3). Ist umgekehrt eine F_l in allen Punkten geodätisch, so haben alle Flächengeodätischen in jedem Punkt die erste Raumkrümmung Null und sind somit zugleich Raumgeodätische. Also: *Eine F_l ist dann und nur dann eine Ebene E_l , wenn sie in allen Punkten geodätisch ist.*

Ist (vgl. § 3)

$$(1) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

wo φ zweimal stetig differenzierbar ist, die Gleichung einer E_{n-1} , so gilt in allen Punkten der E_{n-1}

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

und umgekehrt folgt aus dem Bestehen von (2) in den Punkten von (1), daß die F_{n-1} (1) eine Ebene ist. Erweitern wir die Definition von a_i über das Gebiet (1) hinaus, so können wir an Stelle von (2) auch

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + A_{ik}$$

schreiben, wo

$$(3') \quad A_{ik}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

ist in allen Punkten der E_{n-1} (1); a_i kann dabei stets als stetig angenommen werden.

Wir geben nun eine zweite Definition der Ebenen E_i : Eine Hyperfläche F_i des R_n ist eine Ebene E_i , wenn sie dauernd jeden Vektor enthält, der aus einer beliebigen, der F_i angehörenden Anfangslage durch Parallelverschiebung längs einer beliebigen Kurve der F_i entsteht.

Die Äquivalenz der beiden Definitionen weisen wir für die E_{n-1} nach; sofern eine E_i als Schnitt mehrerer E_{n-1} erhalten werden kann, sind die Definitionen auch im allgemeinen Fall äquivalent.¹⁾ Sei also (1) die Gleichung einer E_{n-1} nach der zweiten Definition und x_i, λ^i ein beliebiger in der E_{n-1} liegender Vektor. Dann gilt

$$(4) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \lambda^i = 0.$$

Ferner sei $x_i = x_i(s)$ eine beliebige, den Punkt x_i enthaltende Kurve C der E_{n-1} , für die also

$$(5) \quad \varphi(x_1(s), \dots, x_n(s)) \equiv 0$$

(identisch in s) gilt. Der aus x_i, λ^i durch Parallelverschiebung längs C entstehende Vektor $x_i(s), \lambda^i(s)$ liegt dann definitionsgemäß dauernd in der E_{n-1} , so daß

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi(x_1(s), \dots, x_n(s))}{\partial x_i} \lambda^i(s) \equiv 0$$

ist. Durch absolute Differentiation von (6) nach s folgt wegen $\frac{\partial \lambda^i}{\partial s} = 0$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \lambda^i dx_k = 0,$$

1) In VII, § 2 geben wir übrigens auch einen direkten Nachweis.

und zwar gilt diese Relation für den beliebigen Vektor λ^i und die beliebige Richtung dx_i der E_{n-1} , d. h. (7) ist eine Folge von

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \lambda^i = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

Um so mehr gelten (für $\lambda^i = dx_i$) die charakteristischen Relationen (3, 10), d. h. die E_{n-1} ist in der Tat in allen Punkten geodätisch, also eine E_{n-1} auch nach der ersten Definition.

Sei jetzt, zum Nachweis der Umkehrung, (1) eine E_{n-1} nach der ersten Definition, für die also die charakteristischen Relationen (3) und (3') gelten. In dieser E_{n-1} liege der Vektor x_i, λ^i und die stetig differenzierbare Kurve $C, x_i = x_i(s)$, längs der der Vektor parallelverschoben werde. Der Ausgangsvektor ($s = 0$) liege in der E_{n-1} , so daß, wenn wir

$$(9) \quad f(s) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \lambda^i(s)$$

setzen, $f(0) = 0$ ist. Durch absolute Differentiation von (9) nach s folgt wegen (3) und $\frac{d\lambda^i}{ds} = 0$

$$(10) \quad f'(s) = \frac{d^2 \varphi}{dx_i dx_k} \lambda^i x_k' = a_i \lambda^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} x_k' + a_k x_k' f(s) + A_{ik}(s) \lambda^i x_k'.$$

Wegen (5) verschwindet $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} x_k'$ und wegen (3') auch $A_{ik}(s)$ und es bleibt

$$(11) \quad f'(s) = a_k x_k' f(s).$$

Da die rechte Seite eine stetige Funktion von s ist, gibt es zu gegebenen Anfangswerten nur eine einzige Lösung dieser Differentialgleichung, zu den Anfangswerten $f(0) = 0$ insbesondere nur die eine Lösung $f(s) \equiv 0$.¹⁾ Somit ist nach (9)

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \lambda^i = 0,$$

w. z. b. w.

Eine einfache Folgerung aus der zweiten Ebenendefinition ist: *Der normierte Normalenvektor einer E_{n-1} ist ein längs jeder Kurve der E_{n-1} parallelverschobener Vektor.* Verschiebt man nämlich ein normiertes n -Bein längs einer Kurve C der E_{n-1} parallel, dessen $n - 1$ erste Vektoren (in einer Zwischenlage und daher) immer der E_{n-1} angehören, so fällt der n te Vektor stets in die Richtung der Flächennormalen.

Für eine Transformation des *euklidischen* R_n , die von allgemeinen zu kartesischen Koordinaten²⁾ führt, $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \dots, x_n)$, gilt

$$(13) \quad \frac{d^2 \bar{x}_i}{dx_k dx_l} = 0.$$

1) Die Gleichung (11) läßt sich ja auch unmittelbar integrieren.

2) Solche sind in *jedem* Punkt des R_n geodätisch.

Die Einzelflächen jeder der n Scharen $\bar{x}_i(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_i$ sind also Ebenen E_{n-1} . Wir hatten sie in (1, 17) in der Form

$$(14) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \int \lambda_i dx_i$$

dargestellt, wo λ_i ein eindeutig parallelverschobener Vektor des R_n ist. Eine F_{n-1} (14) ist aber wegen

$$(15) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lambda_i, \quad \frac{d^2 \varphi}{dx_i dx_k} = \frac{d \lambda_i}{dx_k} = 0$$

immer, d. h. auch in nicht euklidischen Räumen, eine Ebene E_{n-1} , wenn nur λ_i ein eindeutig parallelverschobener Vektor ist. Über RIEMANNSCHE Räume, in denen eindeutig parallelverschobene Vektoren oder Vektorräume existieren, vgl. § 5.

Die Riemannschen Räume konstanter Krümmung lassen sich durch ihre Ebeneneigenschaften in einfacher Weise charakterisieren. Wir betrachten das System totaler Differentialgleichungen

$$(16) \quad \begin{cases} d\varphi = p_k dx_k \\ dp_i = -K\varphi g_{ik} dx_k, \end{cases}$$

wo K eine Konstante ist. Dieses System ist im R_n mit der konstanten Krümmung K vollständig integrierbar. Gemäß einer Bemerkung, die wir im Anschluß an die Formel (2, 9) machten, sind nämlich

$$(17) \quad \frac{\partial^2 p_k}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 p_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{d^2 p_k}{dx_j dx_i} - \frac{d^2 p_k}{dx_i dx_j} - R^r{}_{kij} p_r = 0$$

die nicht trivialen Integrabilitätsbedingungen von (16), die wegen

$$(18) \quad \frac{dp_k}{dx_i} = -K g_{ik} \varphi, \quad \frac{d^2 p_k}{dx_j dx_i} = -K g_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -K g_{ik} p_j$$

ausführlicher

$$(19) \quad p_r [-K(g_{kj} \delta'_j - g_{kj} \delta'_i) + R^r{}_{kij}] = 0$$

lauten. Nun gilt nach (2, 21) im R_n konstanter Krümmung K

$$(20) \quad R^r{}_{kij} = K(g_{kj} \delta'_j - g_{kj} \delta'_i),$$

also ist in einem solchen R_n (19) in der Tat identisch erfüllt. Es gibt dann zu beliebig vorgegebenen Anfangswerten x_i^0, φ^0, p_i^0 stets eine Lösung

$$(21) \quad \varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n), \quad p_i = p_i(x_1, \dots, x_n)$$

von (16), die diesen Anfangswerten genügt. Die Flächen F_{n-1}

$$(22) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi$$

genügen dabei dem zu (16) äquivalenten System

$$(23) \quad \frac{d^2 \varphi}{dx_i dx_k} = -K g_{ik} \varphi.$$

Wählen wir den einen Anfangswert $\varphi^0 = 0$, so ist die entsprechende F_{n-1} nach (23) eine Ebene E_{n-1} . Somit gilt:

In Räumen konstanter Krümmung gibt es in jedem Punkt und in jeder Orientierung¹ Ebenen E_{n-1} .

Wir zeigen noch, daß auch umgekehrt ein R_n , der in jedem Punkt und in jeder Orientierung Ebenen E_{n-1} enthält, notwendig ein R_n konstanter Krümmung ist. Dabei nehmen wir $n > 2$ an. Bilden die drei Vektoren v^i, w^i und λ^i ein normiertes Dreibein eines Punktes P , so gibt es voraussetzungsgemäß eine E_{n-1} , die durch P geht, in P den Normalenvektor λ^i hat und deren Tangentenraum in P dann die Vektoren v^i und w^i enthält. In der E_{n-1} legen wir durch P eine zweidimensionale Fläche F_2 , deren Tangentenraum in P durch die beiden Vektoren v^i und w^i aufgespannt wird, und ziehen in dieser F_2 eine durch P gehende geschlossene Kurve C . Verschieben wir längs dieser Kurve den Vektor λ^i parallel (von P nach P), so fallen Anfangs- und Endlage zusammen, da λ^i der Normalenvektor und C eine Kurve der E_{n-1} ist. Nach (2, 49) ist dann

$$(24) \quad R_{i,jlk} \lambda^j v^l w^k = 0.$$

Diese Relation hat im ganzen R_n zu gelten, wenn nur

$$(25) \quad v_i \lambda^i = w_i \lambda^i = 0$$

ist, d. h. (24) ist eine Folge von (25). Dabei ist die ursprüngliche Annahme, daß v_i und w_i ein normiertes Zweibein bilden, unwesentlich.

Aus (24) und (25) läßt sich nun ohne Schwierigkeit die Konstanz der Raumkrümmung nachweisen. Der Tensor

$$(26) \quad R_{i,jlk} v^l w^k = T_{ij}(v, w)$$

habe in einem n -Bein $(\alpha)\lambda_i$ die Darstellung

$$(27) \quad T_{ij}(v, w) = (\alpha\beta)T(v, w) (\alpha)\lambda_i (\beta)\lambda_j.$$

Bezeichnen wir das zu $(\alpha)\lambda_i$ adjungierte n -Bein mit $(\alpha)\mu^i$, so gilt bekanntlich

$$(28) \quad (\alpha\beta)T(v, w) = T_{ij}(v, w) (\alpha)\mu^i (\beta)\mu^j = -(\beta\alpha)T(v, w).$$

Wir setzen nun $(1)\lambda_i = v_i, (2)\lambda_i = w_i$ und wählen $(\alpha)\lambda_i$ ($\alpha = 3, \dots, n$) als normiertes $n-2$ Bein, das den Normalvektorraum von v_i und w_i aufspannt. Dann ist $(\alpha)\lambda^i = (\alpha)\mu^i$ ($\alpha = 3, \dots, n$), und es gilt wegen (24) und (25)

$$(29) \quad (\alpha\beta)T(v, w) = R_{i,jlk} (1)\lambda^i (2)\lambda^j (\alpha)\mu^k (\beta)\mu^l = 0 \quad (\alpha \text{ oder } \beta = 3, \dots, n).$$

An Stelle von (27) tritt somit

$$(30) \quad T_{ij}(v, w) = A(v, w)(v_i w_j - w_i v_j),$$

¹ D. h. mit gegebener Normalen p_i^0 in dem gegebenen Punkt.

wo zur Abkürzung $A(v, w)$ statt ${}_{(12)}T(v, w)$ gesetzt ist, oder

$$(31) \quad R_{i,j,ik} v^i w^k = A(v, w) (g_{i,i} g_{j,k} - g_{i,k} g_{j,i}) v^i w^k.$$

Wir zeigen nun, daß $A(v, w)$ von v^i und w^i unabhängig ist. Wir differenzieren (31) nach v^r und erhalten

$$(32) \quad R_{i,j,rk} w^k = \frac{\partial A}{\partial v^r} (g_{i,l} g_{j,k} - g_{i,k} g_{j,l}) v^i w^k + A(v, w) (g_{i,r} g_{j,k} - g_{i,k} g_{j,r}) w^k.$$

Durch Überschiebung mit $v^i w^j$ folgt

$$(33) \quad R_{i,j,rk} w^k v^i w^j = \frac{\partial A}{\partial v^r} [(v_i v^i) (w_i w^i) - (v_i w^i)^2] \\ + A(v, w) (g_{i,r} g_{j,k} - g_{i,k} g_{j,r}) w^k v^i w^j.$$

Wegen $R_{i,j,rk} = R_{r,k,i,j}$ und (31) ist die linke Seite gleich

$$A(v, w) (g_{r,i} g_{k,j} - g_{r,j} g_{k,i}) v^i w^j w^k.$$

Da ferner für unabhängige Vektoren v_i und w_i stets $(v_i v^i) (w_i w^i) - (v_i w^i)^2 > 0$ ist, folgt aus (33)

$$(34) \quad \frac{\partial A(v, w)}{\partial v^r} = 0.$$

Ebenso zeigt man, daß $A(v, w)$ von w^i nicht abhängt. Aus (31) folgt daher, da die Vektoren v^i und w^i willkürlich waren,

$$(35) \quad R_{i,j,ik} = A(g_{i,i} g_{j,k} - g_{i,k} g_{j,i}),$$

d. h. der R_n hat die konstante Krümmung A , w. z. b. w.

Zum Schluß noch eine Bemerkung über die Flächenschar (22). Wegen

$$(36) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = g^{ik} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \\ = -2K \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (-K \varphi^2)$$

gilt für sie

$$(37) \quad g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = -K \varphi^2 + K_1,$$

wo K_1 eine zweite Konstante ist. Betrachten wir zunächst den Spezialfall $K=0$, $K_1=1$. Über den R_n machen wir dabei weiter keine Voraussetzungen.¹⁾ Dann ist

$$(38) \quad g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 1.$$

Wir zeigen, daß die Orthogonaltrajektorien einer Schar (22), für die (38) gilt, Geodätische des R_n sind und daß die geodätischen Bogen, die von je zwei Flächen

1) D. h. wir untersuchen eine Lösung $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ der partiellen Differentialgleichung (37) in irgendeinem RIEMANNschen R_n .

der Schar auf den Orthogonaltrajektorien abgeschnitten werden, gleiche Länge haben. Die Flächen der Schar werden demgemäß auch als Flächen gleichen Abstandes oder als geodätische Parallele bezeichnet. Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(39) \quad \frac{dx_i}{ds} = g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

definiert die auf ihre Bogenlänge bezogenen Orthogonaltrajektorien $x_i = x_i(s)$, denn links steht der normierte Tangentenvektor, rechts der wegen (38) ebenfalls normierte Normalenvektor der F_{n-1} mit der Gleichung $\varphi = \text{konst.}$ Durch absolute Differentiation von (39) folgt

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{b^2 x_i}{b s^2} &= g^{ik} \frac{b^2 \varphi}{b x_k b x_l} \frac{dx_l}{ds} = g^{ik} g^{lh} \frac{b^2 \varphi}{b x_k b x_l} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \\ &= \frac{1}{2} g^{ik} \left(g^{lh} \frac{b^2 \varphi}{b x_k b x_l} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + g^{lh} \frac{b^2 \varphi}{b x_k b x_h} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \right) = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{b}{b x_k} \left(g^{lh} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \right) = 0, \end{aligned}$$

also ist die Orthogonaltrajektorie in der Tat eine Geodätische. Längs einer solchen berechnen wir nun

$$(41) \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 1,$$

also ist

$$(42) \quad \varphi = s + \text{konst.},$$

womit unsere Behauptung vollständig bewiesen ist.

Die allgemeineren Scharen, für die (37) mit beliebigen Konstanten K und K_1 gilt, lassen sich durch eine Transformation $\Phi = \Phi(\varphi)$ leicht so darstellen, daß wieder die speziellere Relation (38) gilt. Schreiben wir (37) in der allgemeinsten Form

$$(43) \quad g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = F(\varphi),$$

so wird wegen

$$(44) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi' \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$$(45) \quad g^{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = (\Phi')^2 F(\varphi).$$

Setzen wir

$$(46) \quad \Phi(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}}$$

(der Radikand ist nach (43) wesentlich positiv), so folgt

$$(47) \quad g^{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 1.$$

Eine Lösung (22) von (23) besteht also stets aus einer Ebene E_{n-1} ($\varphi = 0$) und geodätisch parallelen F_{n-1} , die, wie wir in VII, § 3 zeigen werden, Flächen konstanter Relativkrümmung sind.

§ 5. Eindeutig parallelverschobene Vektorräume im Riemannschen R_n .

Im R_n sei ein eindeutig parallelverschobener Vektorraum $V^{(r)}$ gegeben, der durch das normierte r -Bein $(\alpha)\lambda^i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) aufgespannt werde. Für den Projektionstensor (III, § 2) $p^{ik} = (\alpha)\lambda^i (\alpha)\lambda^k$ gilt dann $\mathfrak{b}p^{ik} = 0$ oder

$$(1) \quad (\alpha)\lambda^i \frac{\mathfrak{b}(\alpha)\lambda^k}{\mathfrak{b}x_h} + (\alpha)\lambda^k \frac{\mathfrak{b}(\alpha)\lambda^i}{\mathfrak{b}x_h} = 0 \quad (\alpha=1, \dots, r).$$

Ergänzen wir das r -Bein $(\alpha)\lambda^i$ zu einem normierten n -Bein, so gilt die Darstellung (vgl. III, § 1)

$$(2) \quad \frac{\mathfrak{b}(\alpha)\lambda^k}{\mathfrak{b}x_h} = (\alpha\beta)C_h(\beta)\lambda^k \quad (\alpha=1, \dots, r; \beta=1, \dots, n),$$

und aus (1) folgt

$$(3) \quad (\alpha)\lambda^i (\alpha\beta)C_h(\beta)\lambda^k + (\alpha)\lambda^k (\alpha\beta)C_h(\beta)\lambda^i = 0 \quad (\alpha=1, \dots, r; \beta=1, \dots, n).$$

Da die Vektoren $(\gamma)\lambda^i$ ($\gamma = 1, \dots, n$) linear unabhängig sind, muß

$$(4) \quad (\alpha)\lambda^k (\alpha\beta)C_h = 0 \quad (\alpha=1, \dots, r; \beta=r+1, \dots, n)$$

und aus demselben Grunde

$$(5) \quad (\alpha\beta)C_h = 0 \quad (\alpha=1, \dots, r; \beta=r+1, \dots, n)$$

sein. Aus (2) und (5) folgt

$$(6) \quad \frac{\mathfrak{b}(\alpha)\lambda^k}{\mathfrak{b}x_h} = (\alpha\beta)C_h(\beta)\lambda^k \quad (\alpha, \beta=1, \dots, r)$$

für jedes einen eindeutig parallelverschobenen $V^{(r)}$ aufspannende normierte r -Bein; umgekehrt folgt aus (6) wegen $(\alpha\beta)C_h = -(\beta\alpha)C_h$, daß $\mathfrak{b}p^{ik} = 0$ ist.¹⁾

Wir beweisen nun den folgenden Satz:

Der Projektionstensor p_{ik} eines eindeutig parallelverschobenen Vektorraumes $V^{(r)}$ ist insofern der allgemeinste eindeutig parallelverschobene symmetrische Tensor zweiter Stufe, als sich jeder derartige Tensor a_{ik} als Summe eindeutig parallelverschobener Projektionstensoren p_{ik}, q_{ik}, \dots in der Form

$$ap_{ik} + bq_{ik} + \dots = a_{ik}$$

mit konstanten a, b, \dots darstellen läßt.

Der Tensor a_{ik} genügt den Differentialgleichungen²⁾

$$(7) \quad \frac{\mathfrak{b}a_{ik}}{\mathfrak{b}x_j} = 0.$$

1) Man zeige, daß sich zu jedem eindeutig parallelverschobenen $V^{(r)}$ Hyperflächen F_r angeben lassen, deren Tangentenraum der $V^{(r)}$ ist. Diese F_r sind dann nach der zweiten Definition von § 4 Ebenen E_r . (Man zeigt dabei, daß $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} (\alpha)\lambda^i = 0$ ($\alpha = 1, \dots, r$) ein vollständiges System ist.)

2) Um Lösungstensoren von (7) zu finden, hat man das System totaler Differentialgleichungen

$$(I) \quad da_{ik} = \left[\begin{matrix} i & j \\ r \end{matrix} \right] a_{rk} + \left[\begin{matrix} k & j \\ r \end{matrix} \right] a_{ir} dx_j$$

Da g_{ik} positiv definit ist, existieren in einem beliebigen Punkt P des R_n die Beindarstellungen (*Hauptachsentransformation*)

$$(8) \quad g_{ik} = {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\alpha)}\mu_k$$

und

$$(9) \quad a_{ik} = \sum_{\alpha=1}^n {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\alpha)}\mu_k,$$

wo die ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ein normiertes n -Bein bilden und die ${}_{(\alpha)}\mu$ für den Tensor a_{ik} charakteristische Invarianten sind. Wir verbinden den Punkt P durch zwei Bogen C und C' mit einem zweiten Punkt Q und verschieben das normierte n -Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ sowohl längs C als auch längs C' parallel nach Q ; in der Endlage Q erhalten wir dann zwei im allgemeinen verschiedene n -Beine, die mit ${}_{(\alpha)}\mu_i$ und ${}_{(\alpha)}\nu_i$ bezeichnet seien. Da a_{ik} und g_{ik} parallelverschobene Tensoren sind, gelten die Darstellungen (8) und (9) längs C und C' mit konstanten ${}_{(\alpha)}\mu$. Insbesondere ist in Q

$$(10) \quad g_{ik} = {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\alpha)}\mu_k = {}_{(\alpha)}\nu_i {}_{(\alpha)}\nu_k$$

und

$$(11) \quad a_{ik} = \sum_{\alpha=1}^n {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\alpha)}\mu_k = \sum_{\alpha=1}^n {}_{(\alpha)}\nu_i {}_{(\alpha)}\nu_k$$

mit ${}_{(\alpha)}\mu = {}_{(\alpha)}\nu$. Zwischen den beiden wegen (10) normierten n -Beinen ${}_{(\alpha)}\mu_i$ und ${}_{(\alpha)}\nu_i$ in Q bestehen die Relationen

$$(12) \quad {}_{(\alpha)}\nu_i = {}_{(\alpha\beta)}\mu_i$$

einer orthogonalen Transformation. Durch Überschiebung von (12) mit ${}_{(\gamma)}\mu^i$ folgt wegen ${}_{(\beta\gamma)}\mu_i \mu^i = \delta_{\beta\gamma}$

$$(13) \quad {}_{(\alpha\beta)}\mu^i = {}_{(\alpha)}\nu_i {}_{(\beta)}\mu^i$$

und durch Überschiebung von (11) mit ${}_{(\beta)}\nu^k$ wegen ${}_{(\alpha)}\nu_k {}_{(\beta)}\nu^k = \delta_{\alpha\beta}$

$$(14) \quad \sum_{\alpha=1}^n {}_{(\alpha)}\mu_i {}_{(\alpha)}\mu_k {}_{(\beta\alpha)}\mu^i = {}_{(\beta)}\nu_i {}_{(\beta)}\nu^k, \quad (\text{nicht summieren über } \beta)$$

ebenso zu behandeln, wie wir in § 1 das System

$$d\lambda^i = - \left\{ \begin{matrix} p & q \\ i \end{matrix} \right\} \lambda^p d x_q$$

behandelten, um die eindeutig parallelverschobenen Vektoren eines gegebenen R_n wirklich zu berechnen. Es sind also die Integrabilitätsbedingungen von (I) aufzustellen, und dieses System von Gleichungen für die $x_1, \dots, x_n, \dots, a_{ik}, \dots$ ist so lange zu „erweitern“, als diese Erweiterung neue Relationen liefert. Jedem Wertesystem $x_1, \dots, x_n, \dots, a_{ik}, \dots$, das dem so entstandenen Gleichungssystem genügt, entspricht dann ein Lösungstensor von (I), der im Punkte x_i die Werte a_{ik} annimmt.

oder wegen (12)

$$(15) \quad \sum_{\alpha=1}^n ({}_{\alpha})\mu ({}_{\alpha})\mu_i ({}_{\beta}\alpha)^C = \sum_{\alpha=1}^n ({}_{\beta})\nu ({}_{\beta}\alpha)^C ({}_{\alpha})\mu_i, \quad \text{(nicht summieren über } \beta^1\text{).}$$

Wegen der Unabhängigkeit der n Vektoren $({}_{\alpha})\mu_i$ müssen in (15) die Koeffizienten der $({}_{\alpha})\mu_i$ alle verschwinden:

$$(16) \quad ({}_{\alpha})\mu ({}_{\beta}\alpha)^C = ({}_{\beta})\nu ({}_{\beta}\alpha)^C, \quad \text{(nicht summieren über } \alpha \text{ und } \beta^1\text{).}$$

Ist nun $({}_{\alpha})\mu \neq ({}_{\beta})\nu$, so muß nach (16)

$$(17) \quad ({}_{\beta}\alpha)^C = 0$$

sein. Es sind also in (12) nur jene Vektoren $({}_{\alpha})\mu_i$ und $({}_{\beta})\nu_i$ miteinander verbunden, für die $({}_{\alpha})\mu = ({}_{\beta})\nu$ ist. Die orthogonale Transformation (12) zerfällt somit in eine Anzahl von orthogonalen Teiltransformationen, von denen jede nur solche Vektoren $({}_{\alpha})\mu_i$ und $({}_{\beta})\nu_i$ verknüpft, für die $({}_{\alpha})\mu = ({}_{\beta})\nu$ ist. Ist z. B. (bei entsprechender Numerierung der Beinvektoren) $({}_1)\mu = ({}_2)\mu = \dots = ({}_q)\mu$ die Gesamtheit aller Skalare $({}_{\alpha})\mu$, die gleich $({}_1)\mu$ sind, so werden die Vektoren $({}_{\alpha})\mu_i$ ($\alpha = 1, \dots, q$) und $({}_{\alpha})\nu_i$ ($\alpha = 1, \dots, q$) durch eine orthogonale Transformation

$$(18) \quad ({}_{\alpha})\nu_i = ({}_{\alpha\beta})^C ({}_{\beta})\mu_i \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, q)$$

verbunden sein, und daher gilt

$$(19) \quad \sum_{\alpha=1}^q ({}_{\alpha})\mu_i ({}_{\alpha})\mu_k = \sum_{\alpha=1}^q ({}_{\alpha})\nu_i ({}_{\alpha})\nu_k = p_{ik}.$$

Der durch die Vektoren $({}_{\alpha})\mu_i$ ($\alpha = 1, \dots, q$) aufgespannte Vektorraum ist daher eindeutig parallelverschoben. Der Tensor a_{ik} hat somit die Gestalt

$$(20) \quad a_{ik} = ({}_1)\mu p_{ik} + \dots = a p_{ik} + b q_{ik} + \dots,$$

w. z. b. w. Damit also (7) eine von g_{ik} verschiedene Lösung a_{ik} hat, ist notwendig und hinreichend, daß es im R_n eindeutig parallelverschobene Vektorräume gibt.

Ist $V^{(r)}$ ein derartiger, durch das r -Bein $({}_{\alpha})\mu_i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) aufgespannter Vektorraum, so ist sein Normalvektorraum $V^{(n-r)}$ ebenfalls ein eindeutig parallelverschobener Vektorraum. Ist p_{ik} der Projektionstensor von $V^{(r)}$ und q_{ik} der von $V^{(n-r)}$, so gilt

$$(21) \quad g_{ik} = p_{ik} + q_{ik};$$

also ist

$$(22) \quad a_{ik} = a p_{ik} + b q_{ik}$$

mit nicht verschwindenden Konstanten a, b ein Lösungstensor von (7), dessen Matrix den Rang n hat.¹⁾ Da $p^{ik} q_{ij} = 0$ ist, gilt

$$(23) \quad g_{ik} g^{ij} = p_{ik} p^{ij} + q_{ik} q^{ij} = \delta_k^j.$$

1) Ist $a > 0$ und $b > 0$, so ist a_{ik} ebenso wie g_{ik} positiv definit.

Setzen wir

$$(24) \quad \bar{a}^{ik} = \frac{1}{a} p^{ik} + \frac{1}{b} q^{ik},$$

so ist

$$(25) \quad \alpha_{ik} \bar{a}^{ij} = \delta_k^j.$$

Aus (7) oder

$$(26) \quad \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_j} = \left\{ \begin{matrix} i & j \\ r \end{matrix} \right\} \alpha_{rk} + \left\{ \begin{matrix} k & j \\ r \end{matrix} \right\} \alpha_{ir}$$

folgt

$$(27) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_j} \right) = \left\{ \begin{matrix} i & k \\ r \end{matrix} \right\} \alpha_{jr}$$

und daraus durch Überschiebung mit \bar{a}^{ji}

$$(28) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_j} \right) \bar{a}^{ji} = \left\{ \begin{matrix} i & k \\ l \end{matrix} \right\}.$$

Die Klammern $\left\{ \begin{matrix} i & k \\ l \end{matrix} \right\}$, die den absoluten Differentialkalkül und die Parallelverschiebung im R_n festlegen, können somit mit jedem eindeutig parallelverschobenen, nicht ausgearteten ($|\alpha_{ik}| \neq 0$) symmetrischen Tensor α_{ik} gebildet werden.

Der RIEMANNSCHE R_n , in dem eindeutig parallelverschobene Vektorräume existieren, läßt sich in geeigneten Koordinaten durch eine besondere Form des Maßtensors charakterisieren.

Es sei $(\alpha)\lambda^i$ ein normiertes, in allen Punkten des R_n definiertes n -Bein, dessen r erste Vektoren einen eindeutig parallelverschobenen $V^{(r)}$ und dessen $n - r$ letzte Vektoren den — dann ebenfalls eindeutig parallelverschobenen — Normalvektorraum $V^{(n-r)}$ des $V^{(r)}$ aufspannen. Wir betrachten dann die beiden wegen (6) vollständigen Systeme partieller Differentialgleichungen

$$(29) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (\alpha)\lambda^i = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r)$$

und

$$(30) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (\alpha)\lambda^i = 0 \quad (\alpha = r+1, \dots, n).$$

Ist $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ ein System unabhängiger Lösungen von (30) und $\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n$ ein ebensolches Lösungssystem von (29), so sind die n Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ unabhängig, also ihre Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right| \neq 0$. Andernfalls wäre

$$(31) \quad A_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} = 0$$

mit nicht durchwegs verschwindenden A_σ . Multiplizieren wir (31) mit $(\alpha)\lambda^i$, so ergeben sich wegen $\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} (\alpha)\lambda^i = 0$ ($\alpha = 1, \dots, r$; $\sigma = r+1, \dots, n$) und $\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} (\alpha)\lambda^i = 0$ ($\alpha = r+1, \dots, n$; $\sigma = 1, \dots, r$) die Relationen

$$(32) \quad \sum_{\sigma=1}^r A_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} (\alpha)\lambda^i = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r \text{ oder } \alpha = r+1, \dots, n).$$

Wegen der Unabhängigkeit der Vektoren $(\alpha)\lambda^i$ muß also $\sum_{\sigma=1}^r A_{\sigma} \frac{\partial \varphi_{\sigma}}{\partial x_i} = 0$ sein, woraus wegen der Unabhängigkeit der φ_{σ} ($\sigma = 1, \dots, r$) weiter $A_{\sigma} = 0$ ($\sigma = 1, \dots, r$) folgt. Ebenso zeigt man $A_{\sigma} = 0$ ($\sigma = r+1, \dots, n$).

Wir können somit die

$$(33) \quad \bar{x}_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$$

als neue Koordinaten einführen, lassen aber die unbequemen Querstriche wieder weg, so daß (29) die unabhängigen Lösungen x_{r+1}, \dots, x_n und (30) die unabhängigen Lösungen x_1, \dots, x_r hat. Für das normierte n -Bein $(\alpha)\lambda^i$ gilt somit

$$(34) \quad \delta_{i(\alpha)} \lambda^i = (\alpha) \lambda^i = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r, i = r+1, \dots, n)$$

$$(35) \quad \delta_{is(\alpha)} \lambda^i = (\alpha) \lambda^s = 0 \quad (\alpha = r+1, \dots, n, s = 1, \dots, r)$$

Aus $g^{ik} = (\alpha)\lambda^i (\alpha)\lambda^k$ folgt wegen (34) und (35)

$$(36) \quad g^{ik} = 0 \quad (i = 1, \dots, r; k = r+1, \dots, n)$$

und somit auch

$$(37) \quad g_{ik} = 0 \quad (i = 1, \dots, r; k = r+1, \dots, n).$$

In (vgl. (6))

$$(38) \quad \frac{\partial (\alpha)\lambda^k}{\partial x_p} = (\alpha\beta) C_{p(\beta)} \lambda^k \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, r)$$

sei $k = r+1, \dots, n$ gesetzt. Da wegen (34) dann $(\beta)\lambda^k = 0$ und $\frac{\partial (\alpha)\lambda^k}{\partial x_p} = 0$ ist, gilt

$$(39) \quad \frac{\partial (\alpha)\lambda^k}{\partial x_p} = \left\{ \begin{matrix} p & q \\ k \end{matrix} \right\} (\alpha) \lambda^q = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r; k = r+1, \dots, n).$$

Nun ist wegen (34) und $|(\alpha)\lambda^q| \neq 0$ ($\alpha, q = 1, \dots, n$) auch $|(\alpha)\lambda^q| \neq 0$ ($\alpha, q = 1, \dots, r$), also ist

$$(40) \quad \left\{ \begin{matrix} p & q \\ k \end{matrix} \right\} = 0 \quad (q = 1, \dots, r; k = r+1, \dots, n)$$

Aus

$$(41) \quad \left\{ \begin{matrix} p & q \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{t=r+1}^n g^{kt} \left[\begin{matrix} p & q \\ t \end{matrix} \right] = 0 \quad (k = r+1, \dots, n; q = 1, \dots, r)$$

folgt wegen $|g^{kt}| \neq 0$ ($k, t = r+1, \dots, n$) weiter

$$(42) \quad \left[\begin{matrix} p & q \\ t \end{matrix} \right] = 0 \quad (q = 1, \dots, r; t = r+1, \dots, n)$$

oder

$$(43) \quad \frac{\partial g_{pt}}{\partial x_q} + \frac{\partial g_{tq}}{\partial x_p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x_t} = 0 \quad (q = 1, \dots, r; t = r+1, \dots, n).$$

In (43) ist aber $g_{tq} = 0$, also bleibt

$$(44) \quad \frac{\partial g_{pt}}{\partial x_q} = \frac{\partial g_{pq}}{\partial x_t} \quad (q = 1, \dots, r; t = r+1, \dots, n).$$

Daraus folgt: Für $p = 1, \dots, r$ ist $g_{p\bar{t}} = 0$, also $\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_t} = 0$, d. h.

$$(45) \quad g_{pa} = g_{pa}(x_1, \dots, x_r) \quad (p, q = 1, \dots, r);$$

für $p = r + 1, \dots, n$ ist $g_{pa} = 0$, also $\frac{\partial g_{pq}}{\partial x_q} = 0$, d. h.

$$(46) \quad g_{pa} = g_{pa}(x_{r+1}, \dots, x_n) \quad (p, q = r+1, \dots, n).$$

Für das quadrierte Bogenelement folgt daraus

$$(47) \quad g_{ik} dx_i dx_k = \sum_{i,k=1}^r g_{ik}(x_1, \dots, x_r) dx_i dx_k + \sum_{i,k=r+1}^n g_{ik}(x_{r+1}, \dots, x_n) dx_i dx_k.$$

Ein derartiger R_n ist eine Art „Produkttraum“ eines R_r und eines R_{n-r} , wobei der R_r im R_n durch $x_i = \text{konst.}$ ($i = r + 1, \dots, n$) und der R_{n-r} durch $x_i = \text{konst.}$ ($i = 1, \dots, r$) gegeben ist. Beide sind im R_n Ebenen E_r bzw. E_{n-r} .

In einem R_n mit dem Bogenelement (47) ist der Vektorraum $V^{(r)}$, der durch die Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i = \delta_{i\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, r$), und sein Normalvektorraum V^{n-r} , der durch die Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i = \delta_{i\alpha}$ ($\alpha = r + 1, \dots, n$) aufgespannt ist, eindeutig parallelverschoben. In

$$(48) \quad \frac{\partial {}_{(\alpha)}\lambda^k}{\partial x_p} = \sum_{\beta=1}^n {}_{(\alpha\beta)}C_p {}_{(\beta)}\lambda^k = {}_{(\alpha k)}C_p$$

verschwindet für $\alpha = 1, \dots, r$; $k = r + 1, \dots, n$ die linke¹⁾ und somit auch die rechte Seite, also läuft für $\alpha = 1, \dots, r$ der Summationsindex β nur von 1 bis r , und es ist

$$(49) \quad \frac{\partial {}_{(\alpha)}\lambda^k}{\partial x_p} = \sum_{\beta=1}^r {}_{(\alpha\beta)}C_p {}_{(\beta)}\lambda^k \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

Der $V^{(r)}$ ist also ein eindeutig parallelverschobener Vektorraum, denn wenn (6) für ein den $V^{(r)}$ aufspannendes r -Bein gilt, so gilt (6) für jedes, also auch für ein normiertes solches r -Bein.

Ist $x_1, \dots, x_n; \mu^1, \dots, \mu^n$ ein in allen Punkten des R_n definierter Vektor, so ordnen wir ihm im R_r : $x_i = \text{konst.}$ ($i = r + 1, \dots, n$) den Vektor $x_1, \dots, x_r; \mu^1, \dots, \mu^r$ zu und im R_{n-r} : $x_i = \text{konst.}$ ($i = 1, \dots, r$) den Vektor $x_{r+1}, \dots, x_n; \mu^{r+1}, \dots, \mu^n$. Wegen (40) ist dann

$$(50) \quad \frac{\partial \mu^i}{\partial x_p} = \frac{\partial \mu^i}{\partial x_p} + \sum_{q=1}^r \left\{ \begin{matrix} p & q \\ i & i \end{matrix} \right\} \mu^q \quad (i, p = 1, \dots, r)$$

und ebenso gilt

$$(51) \quad \frac{\partial \mu^i}{\partial x_p} = \frac{\partial \mu^i}{\partial x_p} + \sum_{q=r+1}^n \left\{ \begin{matrix} p & q \\ i & i \end{matrix} \right\} \mu^q \quad (i, p = r+1, \dots, n),$$

1) Da dann (42) und weiter (40) gilt.

d. h. die absolute Ableitung des Vektors $x_1, \dots, x_r; \mu^1, \dots, \mu^r$ des R_r ist das Teilsystem der absoluten Ableitung $\frac{\delta \mu^i}{\delta x_p}$ des Vektors $x_1, \dots, x_n; \mu^1, \dots, \mu^n$ des R_n für $i, p = 1, \dots, r$ und entsprechendes gilt nach (51) für die Vektoren des R_{n-r} .

Gibt es im R_n noch einen weiteren eindeutig parallelverschobenen Vektorraum $V^{(t)}$, der durch die Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu^i$ ($\alpha = 1, \dots, t$) aufgespannt sei, so gilt, gleichgültig, ob das t -Bein ${}_{(\alpha)}\mu^i$ normiert ist oder nicht, analog zu (6)

$$(52) \quad \frac{\delta {}_{(\omega)}\mu^i}{\delta x_p} = {}_{(\alpha\beta)}D_p {}_{(\beta)}\mu^i \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, t).$$

Im R_r ist dann der durch die Vektoren ${}_{(\omega)}\mu^i$ ($\alpha = 1, \dots, t; i = 1, \dots, r$) ein eindeutig parallelverschobener Vektorraum $V^{(s)}$ aufgespannt, dessen Dimension mit dem Rang s der Matrix $\| {}_{(\omega)}\mu^i \|$ ($\alpha = 1, \dots, t; i = 1, \dots, r$) übereinstimmt. Es tut dabei nichts zur Sache, wenn die t Vektoren, die in (52) für $i = 1, \dots, r$ auftreten, nicht unabhängig sind. Sind ${}_{(1)}\mu^i, \dots, {}_{(s)}\mu^i$ ($s < t, i = 1, \dots, r$) die unabhängigen Vektoren aus der Reihe ${}_{(1)}\mu^i, \dots, {}_{(t)}\mu^i$ ($i = 1, \dots, r$), so gilt für sie ja ein zu (52) analoges Gleichungssystem. Dem Vektorraum $V^{(s)}$ entspricht eine weitere Spaltung der Maßform $\sum_{i, k=1}^r g_{ik}(x_1, \dots, x_r) dx_i dx_k$ usw., solange es noch nicht benützte eindeutig parallelverschobene Vektorräume im R_n gibt.

Auf diese Weise kann man RIEMANNsche Räume mit eindeutig parallelverschobenen Vektorräumen (insbesondere Vektoren) konstruieren. Ist z. B.

$$g_{11} dx_1^2 + 2g_{12} dx_1 dx_2 + g_{22} dx_2^2$$

das quadrierte Bogenelement eines RIEMANNschen R_2 , so ist

$$g_{11}(x_1, x_2) dx_1^2 + 2g_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + g_{22}(x_1, x_2) dx_2^2 + g_{33}(x_3) dx_3^2$$

das quadrierte Bogenelement eines RIEMANNschen R_3 , in dem ein Vektor $\left(\lambda^1 = \lambda^2 = 0, \lambda^3 = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \right)$ eindeutig parallelverschoben ist.

VII. Die l dimensionalen Hyperflächen im Riemannschen R_n und die Erweiterung des absoluten Differentialkalküls.

§ I. Flächen- und Raumtensoren. Das verallgemeinerte Riccidifferential.

Die F_l sei in Parameterdarstellung¹⁾

$$(1) \quad x_i = x_i(y_1, \dots, y_l)$$

gegeben. Die l Vektoren

$$(2) \quad a^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha},$$

die den *Tangentenraum* (genauer *Tangentenvektorraum*) der F_l in einem Punkt P aufspannen, sind linear unabhängig; die Funktionalmatrix

$$(3) \quad \left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \right\|$$

ist dann vom Rang l . Die Größen (2) sind, wie erwähnt (III, § 4), bezüglich der Transformationen der Koordinaten x_i (*Raumtransformationen*), also bei festen y_1, \dots, y_l für jedes α ein kontravarianter Vektor des R_n (*Raumvektor*), dagegen bezüglich der Transformationen der Parameter y_α (*Flächentransformationen*) bei festen x_1, \dots, x_n für jedes i ein kovarianter Vektor der F_l , diese als RIEBMANNscher R_l aufgefaßt (*Flächenvektor*). Wir stellen fest:

Jede geometrische Größe der im R_n eingebetteten F_l muß eine Invariante oder ein Tensor sein, und zwar sowohl bezüglich der Raumtransformationen als auch bezüglich der Flächentransformationen.

Mit

$$(4) \quad \begin{matrix} \beta_1 \dots \beta_\sigma \Gamma^{j_1 \dots j_s} \\ \alpha_1 \dots \alpha_\rho \Gamma_{i_1 \dots i_r} \end{matrix}$$

bezeichnen wir einen *Tensor* eines Punktes P der F_l , der bezüglich der $\left. \begin{matrix} \text{\{Raumtransformationen\}} \\ \text{\{Flächentransformationen\}} \end{matrix} \right\}$ in den $\left. \begin{matrix} \{i_1, \dots, i_r\} \\ \{\alpha_1, \dots, \alpha_\rho\} \end{matrix} \right\}$ kovariant und in den $\left. \begin{matrix} \{j_1, \dots, j_s\} \\ \{\beta_1, \dots, \beta_\sigma\} \end{matrix} \right\}$

1) Wir unterscheiden im folgenden Indizes, die von 1 bis n laufen, und solche, die von 1 bis l laufen. Um das nicht immer wieder angeben zu müssen, bezeichnen wir in diesem Abschnitt einheitlich die ersteren mit lateinischen, die letzteren mit griechischen Indizes. Vgl. zu dem folgenden auch III, § 4.

kontravariant ist. Dabei ist der Tensor jetzt als das Koeffizientensystem einer invarianten Multilinearform beliebiger Raum- und Flächenvektoren definiert. Z. B. ist

$$(5) \quad {}^{\beta}T_{i,j}$$

ein solcher Tensor, wenn bei simultanen Raum- und Flächentransformationen

$$(6) \quad {}^{\beta}\bar{T}_{i,j} \alpha \bar{\mu} \beta \bar{\lambda} \bar{\varrho}^i \bar{\sigma}^j = {}^{\beta}T_{i,j} \alpha \mu \beta \lambda \varrho^i \sigma^j$$

für beliebige Vektoren $\alpha \mu, \beta \lambda$ der F_i , ϱ^i, σ^j des R_n . Transformiert man nur die Raumkoordinaten, so ist $\alpha \bar{\mu} = \alpha \mu, \beta \bar{\lambda} = \beta \lambda$ und

$$(7) \quad \alpha \mu \beta \lambda ({}^{\beta}\bar{T}_{i,j} \bar{\varrho}^i \bar{\sigma}^j - {}^{\beta}T_{i,j} \varrho^i \sigma^j) = 0,$$

woraus wegen der Willkür der Vektoren $\alpha \mu$ und $\beta \lambda$

$$(8) \quad {}^{\beta}\bar{T}_{i,j} \bar{\varrho}^i \bar{\sigma}^j = {}^{\beta}T_{i,j} \varrho^i \sigma^j$$

folgt. Die ${}^{\beta}T_{i,j}$ sind also für jedes Paar α, β ein zweifach kovarianter Tensor des R_n (Raumtensor) und ähnlich für jedes Paar i, j ein gemischter Tensor zweiter Stufe der F_i (Flächentensor).

Ist g_{ik} der Maßtensor des R_n und $\alpha \beta \gamma$ der Maßtensor der F_i , so gilt

$$(9) \quad \alpha \beta \gamma = g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial y_{\alpha}} \frac{\partial x_k}{\partial y_{\beta}}.$$

Es sei nun λ^i ein dem Tangentenraum der F_i in einem Punkt P angehörender Raumvektor. Dann ist also

$$(10) \quad \lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_{\alpha}} \alpha \lambda;$$

die Größen $\alpha \lambda$ sind dabei Invarianten gegenüber Raumtransformationen, aber ein kontravarianter Vektor gegenüber Parametertransformationen, d. h. es gilt, wenn $\bar{y}_{\alpha} = \bar{y}_{\alpha}(y_1, \dots, y_i)$ eine solche Parametertransformation ist,

$$(11) \quad \alpha \bar{\lambda} = \frac{\partial \bar{y}_{\alpha}}{\partial y_{\beta}} \beta \lambda,$$

wenn

$$(12) \quad \lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_{\alpha}} \alpha \bar{\lambda}$$

die zu (10) analoge Darstellung des Raumvektors λ^i ist.

Ist

$$(13) \quad \underset{(\sigma)}{\lambda^i}$$

ein normiertes Raum- n -Bein (n -Bein von Raumvektoren), das in allen Punkten einer gewissen Umgebung der F_i definiert sei, so gilt

$$(14) \quad \underset{(\sigma)}{\lambda^i} \underset{(\sigma)}{\lambda_i} = \delta_{\sigma\tau}, \quad \underset{(\sigma)}{\lambda_i} \underset{(\sigma)}{\lambda^k} = \delta_i^k.$$

Ferner sei

$$(15) \quad \begin{matrix} \omega \\ (\sigma) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \alpha \\ (\tau) \end{matrix}$$

ein in allen Punkten der F_l definiertes normiertes Flächen- l -Bein (l -Bein von Flächenvektoren), so daß

$$(16) \quad \begin{matrix} \alpha \omega \\ (\sigma) \end{matrix} \begin{matrix} \alpha \\ (\tau) \end{matrix} = \delta_{\sigma\tau}, \quad \begin{matrix} \alpha \omega \\ (\sigma) \end{matrix} \begin{matrix} \beta \omega \\ (\sigma) \end{matrix} = \delta_{\alpha\beta}^2$$

ist. (Statt $\delta_{\alpha\beta}^2$ sollte besser $\delta_{\alpha\beta}$ geschrieben werden.)

Jeder Tensor (4) besitzt dann eine eindeutige Darstellung durch die Beine (13) und (15). Zunächst gilt nämlich bei festen $\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_\sigma$

$$(17) \quad \begin{matrix} \beta_1 \dots \beta_\sigma T^{j_1 \dots j_\sigma} \\ \alpha_1 \dots \alpha_q \end{matrix} \begin{matrix} j_1 \dots j_\sigma \\ i_1 \dots i_r \end{matrix} = \begin{matrix} \beta_1 \dots \beta_\sigma \\ \alpha_1 \dots \alpha_q \end{matrix} \begin{matrix} T \\ (p_1 \dots p_r, q_1 \dots q_\sigma) \end{matrix} \begin{matrix} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} \lambda^{j_1} \dots \lambda^{j_\sigma} \\ (p_1) \dots (p_r) (q_1) \dots (q_\sigma) \end{matrix},$$

wo jetzt

$$(18) \quad \begin{matrix} \beta_1 \dots \beta_\sigma \\ \alpha_1 \dots \alpha_q \end{matrix} \begin{matrix} T \\ (p_1 \dots p_r, q_1 \dots q_\sigma) \end{matrix} = \begin{matrix} \beta_1 \dots \beta_\sigma T^{j_1 \dots j_\sigma} \\ \alpha_1 \dots \alpha_q \end{matrix} \begin{matrix} j_1 \dots j_\sigma \\ i_1 \dots i_r \end{matrix} \begin{matrix} \lambda^{i_1} \dots \lambda^{i_r} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_\sigma} \\ (p_1) \dots (p_r) (q_1) \dots (q_\sigma) \end{matrix}$$

ein Flächentensor, also durch das l -Bein (15) darstellbar ist:

$$(19) \quad \begin{matrix} \beta_1 \dots \beta_\sigma \\ \alpha_1 \dots \alpha_q \end{matrix} \begin{matrix} T \\ (p_1 \dots p_r, q_1 \dots q_\sigma) \end{matrix} = \begin{matrix} (\delta_1 \dots \delta_q, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_\sigma) \\ (p_1 \dots p_r, q_1 \dots q_\sigma) \end{matrix} T \begin{matrix} \alpha_1 \omega \dots \alpha_q \omega \\ (\delta_1) \dots (\delta_q) (\varepsilon_1) \dots (\varepsilon_\sigma) \end{matrix} \begin{matrix} \beta^1 \omega \dots \beta^\sigma \omega \\ (\varepsilon_1) \dots (\varepsilon_\sigma) \end{matrix}.$$

Setzen wir (19) in (17) ein, so erhalten wir die gesuchte Darstellung.

Wir definieren nun eine *Differentialoperation* D , die jedem, längs eines Kurvenstückes der F_l definierten, stetig differenzierbaren Tensor einen Tensor gleicher Art zuordnet. Diese Operation möge folgenden Gesetzen genügen:

I.
$$D\varphi = d\varphi,$$

wenn φ ein Skalar ist;

II.
$$D\lambda^i = d\lambda^i + \left\{ \begin{matrix} p & q \\ i & g \end{matrix} \right\}_g \lambda^p dx^g,$$

wo $\left\{ \begin{matrix} p & q \\ i & g \end{matrix} \right\}_g$ die Christoffelklammern für den Maßtensor g_{ik} des R_n sind;

III.
$$D\alpha^\lambda = d\alpha^\lambda + \left\{ \begin{matrix} \omega & \tau \\ \alpha & \gamma \end{matrix} \right\}_\gamma \omega^\lambda dy^\tau,$$

wo $\left\{ \begin{matrix} \omega & \tau \\ \alpha & \gamma \end{matrix} \right\}_\gamma$ die Christoffelklammern für den Maßtensor $\alpha_{\beta\gamma}$ der F_l sind;

IV.
$$D(U + V) = DU + DV,$$

wenn U und V gleichartige Tensoren sind;

V.
$$D(U \cdot V) = U \cdot DV + V \cdot DU,$$

wenn U und V beliebige Tensoren sind.

Daraus folgt, daß für reine Raumtensoren die Operation D mit dem absoluten Differential des R_n , für reine Flächentensoren mit dem absoluten Differential der F_l übereinstimmt. Insbesondere gilt

$$(20) \quad D\lambda_i = d\lambda_i - \left\{ \begin{matrix} i & q \\ p \end{matrix} \right\}_g \lambda_p dx_a$$

und

$$(21) \quad D_\alpha \lambda = d_\alpha \lambda - \left\{ \begin{matrix} \alpha & \tau \\ \omega \end{matrix} \right\}_\gamma \omega^\lambda dy_\tau.$$

Aus der Darstellung des allgemeinen Tensors (4) mittels der Beine (13) und (15) folgt wegen I. bis V. und (20), (21)

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \beta_\sigma} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = d_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \beta_\sigma} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \\ \quad + \beta_1 \dots \beta_\sigma T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} \left\{ \begin{matrix} p & q \\ j_1 \end{matrix} \right\}_g dx_a + \beta_1 \dots \beta_\sigma T_{i_1 i_2 i_3 \dots i_r}^{j_1 j_2 j_3 \dots j_s} \left\{ \begin{matrix} p & q \\ j_2 \end{matrix} \right\}_g dx_a + \dots \\ \quad - \beta_1 \dots \beta_\sigma T_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} \left\{ \begin{matrix} i_1 & q \\ p \end{matrix} \right\}_g dx_a - \beta_1 \dots \beta_\sigma T_{i_1 i_2 j_3 \dots j_s} \left\{ \begin{matrix} i_2 & q \\ p \end{matrix} \right\}_g dx_a - \dots \\ \quad + \omega_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_q} \beta_\sigma T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \left\{ \begin{matrix} \omega & \tau \\ \beta_1 \end{matrix} \right\}_\gamma dy_\tau + \beta_1 \omega_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_q} \beta_\sigma T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \left\{ \begin{matrix} \omega & \tau \\ \beta_2 \end{matrix} \right\}_\gamma dy_\tau + \dots \\ \quad - \beta_1 \beta_2 \dots \beta_\sigma T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 & \tau \\ \omega \end{matrix} \right\}_\gamma dy_\tau - \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_\sigma T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \left\{ \begin{matrix} \alpha_2 & \tau \\ \omega \end{matrix} \right\}_\gamma dy_\tau - \dots \end{array} \right.$$

Die Operation D , das verallgemeinerte Riccidifferential, ordnet ihrer Konstruktion nach jedem Tensor einen gleichartigen zu; daß die Gesetze I. bis V. gelten, zeigt man durch Verwendung derselben Schlußweisen, die uns in II, § 2 zum entsprechenden Resultat für reine Raumtensoren führten.

Für den Tensor (2) gilt insbesondere

$$(23) \quad D_\alpha \eta^i = d_\alpha \eta^i + \left\{ \begin{matrix} p & q \\ i \end{matrix} \right\}_g \alpha \eta^p dx_a - \left\{ \begin{matrix} \alpha & \tau \\ \omega \end{matrix} \right\}_\gamma \omega \eta^i dy_\tau$$

oder wegen $dx_a = \tau \eta^a dy_\tau$

$$(24) \quad D_\alpha \eta^i = \left(\frac{\partial \eta^i}{\partial y_\tau} + \left\{ \begin{matrix} p & q \\ i \end{matrix} \right\}_g \alpha \eta^p \tau \eta^q - \left\{ \begin{matrix} \alpha & \tau \\ \omega \end{matrix} \right\}_\gamma \omega \eta^i \right) dy_\tau.$$

Da der Flächenvektor dy_τ ohne Einschränkung in der F_i gewählt werden kann, muß

$$(25) \quad \frac{D_\alpha \eta^i}{Dy_\tau} = \alpha \tau \eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial y_\tau} + \left\{ \begin{matrix} p & q \\ i \end{matrix} \right\}_g \alpha \eta^p \tau \eta^q - \left\{ \begin{matrix} \alpha & \tau \\ \omega \end{matrix} \right\}_\gamma \omega \eta^i$$

ein zweifach kovarianter Flächen- und einfach kontravarianter Raumtensor $\alpha \tau \eta^i$ sein. Setzen wir in (25) den Ausdruck (2) für $\alpha \tau \eta^i$ ein, so erhalten wir

$$(26) \quad \frac{D_\alpha \eta^i}{Dy_\tau} = \alpha \tau \eta^i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\alpha \partial y_\tau} + \left\{ \begin{matrix} p & q \\ i \end{matrix} \right\}_g \frac{\partial x_p}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_q}{\partial y_\tau} - \left\{ \begin{matrix} \alpha & \tau \\ \omega \end{matrix} \right\}_\gamma \frac{\partial x_i}{\partial y_\omega},$$

woraus noch

$$(27) \quad \alpha \omega \eta^i = \omega \alpha \tau \eta^i$$

folgt.

Für die Maßtensoren g_{ik} des R_n und $\alpha \beta \gamma$ der F_i gilt

$$(28) \quad Dg_{ik} = Dg^{ik} = D_\alpha \beta \gamma = D^\alpha \beta \gamma = 0.$$

Wir geben nun noch eine geometrische Deutung des Tensors ${}_{\alpha\omega}\eta^t$ (25). Aus

(9) folgt durch Differentiation $\frac{D}{Dy_\tau}$

$$(29) \quad g_{i,k} \frac{D}{Dy_\tau} \alpha \eta^i \beta \eta^k + g_{i,k} \alpha \eta^i \frac{D}{Dy_\tau} \beta \eta^k = 0.$$

Der Tensor

$$(30) \quad \tau_{\alpha,\beta} T = g_{i,k} \alpha \tau \eta^i \beta \eta^k$$

ist in den zwei ersten Indizes symmetrisch, in den zwei letzten (und somit auch im ersten und dritten) nach (29) alternierend. Ein solcher Tensor muß aber wegen

$$(31) \quad \alpha \tau \beta T = - \tau \beta \alpha T = \beta \alpha \tau T = - \alpha \tau \beta T$$

verschwinden. Somit ist

$$(32) \quad g_{i,k} \alpha \tau \eta^i \beta \eta^k = 0.$$

Da die $\beta \eta^k = \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta}$ den Tangentenvektorraum der F_l aufspannen, sind die $\alpha \tau \eta^i$ Normalenvektoren (in bezug auf Raumtransformationen) der F_l .

§2. Geodätische F_l und Ebenen E_l .

Es sei

$$(1) \quad y_\alpha = y_\alpha(s)$$

eine auf die Bogenlänge s bezogene Kurve C der F_l . Aus

$$(2) \quad \frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{dy_\alpha}{ds}$$

folgt durch Differentiation $\frac{D}{Ds}$

$$(3) \quad \frac{D^2 x_i}{Ds^2} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{D^2 y_\alpha}{Ds^2} + \alpha \beta \eta^i \frac{dy_\alpha}{ds} \frac{dy_\beta}{ds}$$

oder, wenn wir mit ξ^i das begleitende n -Bein und mit $\frac{1}{\rho_r}$ die Krümmungen von C im R_n , dagegen mit $\alpha_l \eta$ das begleitende l -Bein und mit $\frac{1}{\sigma_l}$ die Krümmungen von C in der F_l bezeichnen,

$$(4) \quad \frac{1}{\rho_1} \xi^i = \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \alpha_l \eta + \alpha \beta \eta^i \alpha_l \eta \beta \eta.$$

Eine F_l nannten wir *geodätisch in einem Punkte P* (der natürlich ein Punkt der F_l sein muß), wenn alle Flächengeodätischen, die durch P gehen, in P die erste Raumkrümmung Null haben, d. h. wenn aus $\frac{1}{\sigma_1} = 0$ in P auch $\frac{1}{\rho_1} = 0$ folgt. In P ist dann $\alpha \beta \eta^i \frac{dy_\alpha}{ds} \frac{dy_\beta}{ds} = 0$ für alle Richtungen $\frac{dy_\alpha}{ds}$, also ist in P

notwendigerweise ${}_{\alpha\beta}\eta^i = 0$. Ist in P umgekehrt ${}_{\alpha\beta}\eta^i = 0$, so verschwindet in P mit $\frac{1}{\sigma_1}$ auch $\frac{1}{\varrho_1}$. Also ist notwendig und hinreichend, damit eine F_i in P geodätisch ist, daß in P

$$(5) \quad {}_{\alpha\beta}\eta^i = 0$$

gilt. Ist eine F_i in allen ihren Punkten geodätisch, oder, was dasselbe besagt, sind alle Flächengeodätischen auch Raumgeodätische, so ist sie eine Ebene E_i ; notwendig und hinreichend dafür ist, daß (5) identisch in den y_α gilt.

Im allgemeinen wird eine Flächengeodätische ($\frac{1}{\sigma_1} = 0$) keine Raumgeodätische sein. Aus (4) folgt, daß eine Flächengeodätische als eine Kurve der F_i charakterisiert ist, deren erste Raumnormale eine Normale der F_i ist. Es ist das eine einfache Verallgemeinerung der elementaren Definition der Geodätischen einer Fläche F_2 im euklidischen R_3 (Bd. 1, VI, § 2).

Aus (4) folgt, wenn wir den Index i herunterziehen,

$$(6) \quad \frac{1}{\varrho_1} \xi_i = \frac{1}{\sigma_1} g_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} {}^\alpha\eta_i + {}_{\alpha\beta}\eta_i {}^\alpha\eta^\beta$$

und daraus durch Überschiebung mit (4) wegen (1, 32)

$$(7) \quad \frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} {}^\alpha\eta^\beta + {}_{\alpha\beta}\eta^i {}^\gamma\eta_i {}^\alpha\eta^\beta {}^\gamma\eta^\delta$$

Da $g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} = {}_{\alpha\beta}\gamma$ der Maßtensor der F_i und die erste Normale ${}^\alpha\eta$ von C ein Einheitsvektor ist, wird aus (7)

$$(8) \quad \frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + g_{ik} {}_{\alpha\beta}\eta^i {}^\gamma\eta^k {}^\alpha\eta^\beta {}^\gamma\eta^\delta$$

Die Differenz $\frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}$ ist somit nie negativ, d. h. es ist stets¹⁾

$$(9) \quad \left| \frac{1}{\varrho_1} \right| \geq \left| \frac{1}{\sigma_1} \right|.$$

Ferner folgt aus (8), daß $\frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}$ für alle Kurven der F_i , die durch einen Punkt P gehen und in P dieselbe Richtung haben, konstant ist. Insbesondere erreicht $\frac{1}{\varrho_1}$ seinen kleinsten Wert, wenn $\frac{1}{\sigma_1} = 0$ ist, d. h.:

Unter allen Kurven der F_i , die in einem gegebenen Punkt gleiche Richtung haben, hat die Geodätische die kleinste Raumkrümmung.

Eine weitere bemerkenswerte Folgerung aus (4) besteht in folgendem. Bildet man für l Geodätische der F_i , die alle durch einen Punkt P hin-

1) Für die Asymptotenlinien einer F_2 im euklidischen R_3 verschwindet ${}_{\alpha\beta}\eta^i dy_\alpha dy_\beta$, so daß für sie $\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\sigma_1^2}$ gilt. Damit ist eine metrische Charakterisierung der Asymptotenlinien gewonnen.

durchgehen und in P aufeinander senkrecht stehen, in P die Summe $\sum \frac{1}{\varrho_1^2} \xi^i$, so erhält man

$$(10) \quad \sum \frac{1}{\varrho_1^2} \xi^i = \alpha \beta \eta^i \sum \alpha \eta^{\beta} \eta = \alpha \beta \eta^i \alpha^{\beta} \gamma,$$

da die $\alpha \eta$ ein normiertes l -Bein der F_l bilden, so daß $\sum \alpha \eta^{\beta} \eta = \alpha^{\beta} \gamma$ ist. Die Summe (10) ist also von der besonderen Wahl der Richtungen der l Geodätischen unabhängig.

Wir betrachten nun insbesondere eine Ebene E_1 . Für sie ist $\alpha \beta \eta^i = 0$ und somit $\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\sigma_1^2}$ für jede Kurve der E_1 . Bei geeigneter Wahl des Vorzeichens können wir

$$(11) \quad \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\sigma_1}$$

setzen. Aus (4) folgt dann, daß

$$(12) \quad \xi^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_{\alpha}} \alpha \eta$$

für jede Kurve der E_1 gilt. Daraus folgt durch Differentiation $\frac{D}{D_s}$ wegen (5)

$$(13) \quad -\frac{1}{\varrho_1} \xi^i + \frac{1}{\varrho_2} \xi^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_{\alpha}} \left(-\frac{1}{\sigma_1} \alpha \eta + \frac{1}{\sigma_2} \alpha \eta \right)$$

oder wegen (11) und (2)

$$(14) \quad \frac{1}{\varrho_2} \xi^i = \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial x_i}{\partial y_{\alpha}} \alpha \eta.$$

Daraus schließt man wie oben, daß auch $\frac{1}{\varrho_2^2} = \frac{1}{\sigma_2^2}$ sein muß, oder, bei geeigneter Entscheidung über das Vorzeichen, $\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\sigma_2}$ und somit

$$(15) \quad \xi^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_{\alpha}} \alpha \eta$$

usw. Allgemein gilt

$$(16) \quad \xi^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_{\alpha}} \alpha \eta, \quad \frac{1}{\varrho_{\beta}} = \frac{1}{\sigma_{\beta}}.$$

Eine Kurve einer E_l des R_n ist also, als Raumkurve des R_n angesehen, höchstens $l-1$ fach gekrümmt, d. h. es ist stets $\frac{1}{\varrho_l} = 0$.

Es sei jetzt

$$(17) \quad \lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_{\alpha}} \alpha \lambda$$

ein längs der Kurve C definierter Vektor der F_l . Durch Differentiation D folgt daraus

$$(18) \quad D\lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_{\alpha}} D\alpha \lambda + \alpha \beta \eta^i \alpha \lambda d y_{\beta}.$$

Ist ${}^{\alpha}\lambda$ in der F_i parallelverschoben, so ist $D{}^{\alpha}\lambda = 0$, und aus (18) folgt

$$(19) \quad D\lambda^i = {}_{\alpha}\beta\eta^i {}^{\alpha}\lambda dy_{\beta},$$

d. h. der infinitesimale Zuwachs $D\lambda^i$ eines in der F_i parallelverschobenen Vektors steht auf der F_i senkrecht. Und umgekehrt gilt: Ist $D\lambda^i$ senkrecht zur F_i , so ist $D{}^{\alpha}\lambda = 0$. *Ein in der F_i parallelverschobener Vektor ist also dadurch charakterisiert, daß sein infinitesimaler Zuwachs stets senkrecht zur F_i steht.*

Die Parallelverschiebung in einer F_i des R_n hängt demnach bei vorgegebener Kurve nur von der Tangentenvektormannigfaltigkeit der F_i längs dieser Kurve ab. Haben zwei F_i eine Kurve C gemeinsam und längs C dieselben Tangentenvektorräume, so ist jeder in der einen F_i längs C parallelverschobene Vektor auch in der zweiten F_i parallelverschoben, denn der invariante Zuwachs des Vektors steht immer auf beiden F_i zugleich senkrecht. Für die F_2 des euklidischen R_3 folgt daraus die bekannte, von T. LÉVI-CIVITA angegebene Konstruktion eines parallelverschobenen Flächenvektors mittels der der Fläche längs der Verschiebungskurve umschriebenen Torse (Bd. 1, VI, § 1).

Im allgemeinen ist ein längs einer Kurve C der F_i parallelverschobener Vektor ${}^{\alpha}\lambda$ ($D{}^{\alpha}\lambda = 0$) im R_n (d. h. als Raumvektor aufgefaßt) nicht parallelverschoben; dazu ist notwendig und hinreichend, daß ${}_{\alpha}\beta\eta^i = 0$ ist. Durch diese Eigenschaft sind aber nach (5) die Ebenen charakterisiert. Man kann auch sagen: *Eine Ebene E_i hat die charakteristische Eigenschaft, daß jeder ihr angehörende Vektor bei räumlicher Parallelverschiebung längs einer beliebigen Kurve der E_i stets in ihr verbleibt.* Denn wegen (18) folgt für einen solchen Vektor aus $D\lambda^i = 0$

$$(20) \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_{\alpha}} D{}^{\alpha}\lambda = 0,$$

also $D{}^{\alpha}\lambda = 0$ und

$$(21) \quad {}_{\alpha}\beta\eta^i {}^{\alpha}\lambda dy_{\beta} = 0$$

und somit wegen der Willkür der Anfangslage (${}^{\alpha}\lambda$ beliebig) und der Kurve C (dy_{β} beliebig)

$$(22) \quad {}_{\alpha}\beta\eta^i = 0.$$

Aus (22) und $D{}^{\alpha}\lambda = 0$ folgt dann auch umgekehrt $D\lambda^i = 0$. Damit haben wir den in VI, § 4 angekündigten allgemeinen Nachweis für die Äquivalenz der beiden Ebenendefinitionen.

Zwischen den Tangenten einer Kurve C in der F_i und im R_n besteht die Beziehung (2) oder

$$(23) \quad \xi^i_1 = \frac{\partial x_i}{\partial y_{\alpha}} {}^{\alpha}\eta_1.$$

Es wird also durch ${}^{\alpha}\eta_1$ der Vektor ξ^i_1 „dargestellt“, d. h. die ${}^{\alpha}\eta_1$ sind die kontravarianten Komponenten des Tangentenvektors in der F_i , die ξ^i_1 die kontra-

varianten Komponenten desselben Vektors im R_n . (Die Tangente von C in der F_i ist mit der Tangente von C im R_n identisch.) Zwischen den verschiedenen Normalen besteht aber, wie (4) zeigt, keine so einfache Relation. Sei η_ω^i der Raumvektor, der im R_n der $(\omega - 1)$ ten Normalen von C bezüglich der F_i entspricht, so daß

$$(24) \quad \eta_\omega^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \alpha \eta_\omega$$

gilt. Durch Differentiation $\frac{D}{Ds}$ folgt daraus

$$(25) \quad \frac{D}{Ds} \eta_\omega^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \left(-\frac{1}{\sigma_{\omega-1}} \alpha \eta_{\omega-1} + \frac{1}{\sigma_\omega} \alpha \eta_{\omega+1} \right) + \alpha_\beta \eta_\omega^i \alpha \eta_\omega \frac{d y_\beta}{ds}$$

also

$$(26) \quad \frac{D}{Ds} \eta_\omega^i = -\frac{1}{\sigma_{\omega-1}} \eta_\omega^i + \frac{1}{\sigma_\omega} \eta_\omega^i + \alpha_\beta \eta_\omega^i \alpha \eta_\omega \frac{d y_\beta}{ds}.$$

Haben wir also das normierte r -Bein

$$(27) \quad \eta_1^i, \eta_2^i, \dots, \eta_r^i$$

gebildet, so erhalten wir $\frac{1}{\sigma_r} \eta^i$ nach (26) als Projektion (III, § 2) des Vektors $\frac{D}{Ds} \eta^i$ in den Vektorraum, der im Tangentenvektorraum der F_i auf den Vektoren (27) senkrecht steht. Da $\eta_1^i = \frac{d x_i}{ds}$ der uns bekannte Tangentenvektor der Kurve ist, können wir auf diese Art vom R_n aus das begleitende l -Bein einer Kurve der F_i (bezüglich der F_i genommen) bilden. Für eine Ebene E_i ist das begleitende l -Bein und die Krümmungen in der E_i und im R_n identisch.¹⁾ Zu bemerken ist noch, daß die Konstruktion des begleitenden Beins (in der F_i) einer Kurve C der F_i nur von C und von den Tangentenvektorräumen der F_i in den Punkten von C abhängt.

§3. Die Relativkrümmungen einer F_i im R_n .

Aus der Formel (1, 32), d. h.

$$(1) \quad g_{ik} \frac{D_\alpha \eta^i}{D y_\beta} \gamma \eta^k = 0$$

gewinnen wir durch Differentiation $\frac{D}{D y_\beta}$

$$(2) \quad g_{ik} \frac{D}{D y_\beta} \left(\frac{D_\alpha \eta^i}{D y_\beta} \right) \gamma \eta^k + g_{ik} \frac{D_\alpha \eta^i}{D y_\beta} \frac{D_\gamma \eta^k}{D y_\beta} = 0$$

1) Aus obiger Überlegung folgt, daß eine in P geodätische F_i die charakteristische Eigenschaft hat, daß das begleitende Bein und die Krümmungen jeder durch P gehenden Kurve in P identisch sind, ob man sie nun in der F_i oder im R_n berechnet.

oder

$$(3) \quad \frac{D}{Dy_\beta} \left(\frac{D \alpha \eta^i}{Dy_\epsilon} \right) \gamma \eta^i = \gamma \eta^i \frac{D^2}{Dy_\beta D y_\epsilon} \alpha \eta^i = -\alpha_\epsilon \eta^i \gamma \eta^i$$

und weiter

$$(4) \quad \gamma \eta^i \left[\frac{D^2}{Dy_\epsilon D y_\beta} \alpha \eta^i - \frac{D^2}{Dy_\beta D y_\epsilon} \alpha \eta^i \right] = \alpha_\epsilon \eta^i \gamma \eta^i - \alpha_\beta \eta^i \gamma \eta^i.$$

Bevor wir an die Diskussion dieser Relation gehen, führen wir den neuen Operator

$$(5) \quad \Delta_{\epsilon\beta} = \frac{D^2}{Dy_\epsilon D y_\beta} - \frac{D^2}{Dy_\beta D y_\epsilon}$$

ein, für den die folgenden Gesetze gelten: Es ist

$$(6) \quad \Delta_{\epsilon\beta} \varphi = 0$$

für einen Skalar $\varphi = \varphi(y_1, \dots, y_l)$,

$$(7) \quad \Delta_{\epsilon\beta}(U + V) = \Delta_{\epsilon\beta} U + \Delta_{\epsilon\beta} V$$

für gleichartige Tensoren U und V ,

$$(8) \quad \Delta_{\epsilon\beta}(U V) = U \Delta_{\epsilon\beta} V + V \Delta_{\epsilon\beta} U$$

für beliebige Tensoren U und V . Den einfachen Nachweis überlassen wir dem Leser. Für (kontravariante) Raumvektoren haben wir in VI, § 2 bereits festgestellt, daß

$$(9) \quad \frac{D^2 \varphi^i}{Dx_l D x_k} - \frac{D^2 \varphi^i}{Dx_k D x_l} = -R^i{}_{rkl} \varphi^r$$

ist. Entsprechend gilt für (kovariante) Flächenvektoren

$$(10) \quad \Delta_{\epsilon\beta} \alpha \varphi = \frac{D^2 \alpha \varphi}{Dy_\epsilon D y_\beta} - \frac{D^2 \alpha \varphi}{Dy_\beta D y_\epsilon} = \sigma_{\alpha\epsilon\beta} R \alpha \varphi$$

wo $\sigma_{\alpha\beta\epsilon} R$ der Krümmungstensor der F_1 ist.

An Stelle von (4) können wir wegen (5)

$$(11) \quad \gamma \eta^i \Delta_{\epsilon\beta} \alpha \eta^i = \alpha_\epsilon \eta^i \gamma \eta^i - \alpha_\beta \eta^i \gamma \eta^i$$

schreiben. Wir gehen nun an die Berechnung von $\Delta_{\epsilon\beta} \alpha \eta^i$ und denken uns zu diesem Zweck den Tensor $\alpha \eta^i$ durch die Beine (1, 13) und (1, 15) dargestellt:

$$(12) \quad \alpha \eta^i = \overset{\sigma}{\underset{p}{\eta}} \alpha \omega \overset{\lambda}{\underset{p}{\lambda}}^i.$$

Üben wir beiderseits die Operation $\Delta_{\epsilon\beta}$ aus, so ergibt sich unter Beachtung der Gesetze (6) bis (8)

$$(13) \quad \Delta_{\epsilon\beta} \alpha \eta^i = \overset{\sigma}{\underset{p}{\eta}} \lambda^i \Delta_{\epsilon\beta} \alpha \omega \overset{\sigma}{\underset{p}{\omega}} + \overset{\sigma}{\underset{p}{\eta}} \alpha \omega \overset{\sigma}{\underset{p}{\Delta_{\epsilon\beta} \lambda^i}}.$$

Nun ist wegen (10)

$$(14) \quad \Delta_{\varepsilon\beta} \alpha \omega = {}^r \alpha_{\beta\varepsilon} R_{\alpha\sigma} \omega.$$

Ferner gilt

$$(15) \quad \frac{D}{Dy_\beta} \lambda^i = \beta \eta^k \frac{D}{Dx_k} \lambda^i,$$

da $\beta \eta^k = \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta}$ ist. Also folgt

$$(16) \quad \frac{D^2 \lambda^i}{Dy_\varepsilon D y_\beta} = \frac{D \lambda^i}{Dx_k} \varepsilon \beta \eta^k + \frac{D^2 \lambda^i}{Dx_\alpha D x_k} \beta \eta^k \varepsilon \eta^j.$$

Wegen der Symmetrie der $\varepsilon \beta \eta^k$ in ε und β ergibt sich daraus

$$(17) \quad \Delta_{\varepsilon\beta} \lambda^i = \left(\frac{D^2 \lambda^i}{Dx_\alpha D x_k} - \frac{D^2 \lambda^i}{Dx_k D x_\alpha} \right) \beta \eta^k \varepsilon \eta^j,$$

also wegen (9)

$$(18) \quad \Delta_{\varepsilon\beta} \lambda^i = -R^i_{\tau k j} \lambda^\tau \beta \eta^k \varepsilon \eta^j.$$

Wegen (14) und (18) erhalten wir aus (13)

$$(19) \quad \Delta_{\varepsilon\beta} \alpha \eta^i = {}^r \alpha_{\beta\varepsilon} R_{\alpha\sigma} \eta^i \omega^\sigma - R^i_{\tau k j} \lambda^\tau \beta \eta^k \varepsilon \eta^j \eta^\sigma \omega^\sigma = {}^r \alpha_{\beta\varepsilon} R_{\alpha\tau} \eta^i - R^i_{\tau k j} \alpha \eta^\tau \beta \eta^k \varepsilon \eta^j.$$

Nun ist

$$(20) \quad \gamma \eta_i \alpha \eta^i = g_{ik} \alpha \eta^i \gamma \eta^k = \alpha \gamma,$$

also folgt aus (11) und (19)

$$(21) \quad \alpha \varepsilon \eta_i \gamma \beta \eta^i - \alpha \beta \eta_i \gamma \varepsilon \eta^i = \gamma \alpha_{\beta\varepsilon} R - R^i_{\tau k j} \gamma \eta^i \alpha \eta^\tau \beta \eta^k \varepsilon \eta^j.$$

Den Tensor linker Hand nennen wir mit RIOCI den *relativen Krümmungstensor der F_i bezüglich des einbettenden R_n* ; er ist vom RIEMANNschen Krümmungstensor ${}^r \alpha_{\beta\varepsilon} R$ der F_i wohl zu unterscheiden.

Es sei durch die beiden Vektoren

$$(22) \quad p^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \alpha p, \quad q^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \alpha q$$

in einem Punkt P der F_i eine F_2 -Richtung der F_i (d. i. ein zweidimensionaler Vektorraum, der dem Tangentenraum der F_i im Punkt P angehört) gegeben.

Aus

$$(23) \quad g_{ik} p^i q^k = \alpha \beta \gamma \alpha p^\beta q$$

folgt dann

$$(24) \quad (g_{ik} g_{jn} - g_{in} g_{jk}) (p^i q^j - q^i p^j) (p^k q^n - q^k p^n) = (\alpha \beta \gamma \varepsilon \delta \gamma - \alpha \delta \gamma \beta \varepsilon \gamma) (\alpha p^\varepsilon q - \alpha q^\varepsilon p) (\beta p^\delta q - \beta q^\delta p).$$

Bezeichnen wir die RIEMANNsche Krümmung des R_n für diese F_2 -Richtung mit $K(n)$, die der F_i mit $K(l)$ und mit

$$(25) \quad k = \frac{(\alpha \varepsilon \eta_i \gamma \beta \eta^i - \alpha \beta \eta_i \gamma \varepsilon \eta^i) (\alpha p \gamma q - \alpha q \gamma p) (\varepsilon p \beta q - \varepsilon q \beta p)}{(\alpha \varepsilon \gamma \gamma \beta \gamma - \alpha \beta \gamma \gamma \varepsilon \gamma) (\alpha p \gamma q - \alpha q \gamma p) (\varepsilon p \beta q - \varepsilon q \beta p)}$$

die Relativkrümmung der F_l für diese F_2 -Richtung in P , so folgt aus (21) wegen (24) und (25)

$$(26) \quad k = K(l) - K(n).$$

Ist die F_l in P geodätisch, so verschwindet k in P wegen $\alpha_\varepsilon \eta_i = 0$, also:

Die Riemannschen Krümmungen des R_n und einer in P geodätischen F_l des R_n stimmen in P für jede F_2 -Richtung der F_l überein. Daraus folgt:

Eine Ebene E_l hat in allen Punkten dieselben Krümmungen wie der einbettende R_n .

Als Beispiel berechnen wir die Relativkrümmung einer F_{n-1} der Schar

$$(27) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \text{konst.},$$

wobei φ den Differentialgleichungen

$$(28) \quad \frac{\flat^2 \varphi}{\flat x_i \flat x_k} = a \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + K g_{ik} \varphi$$

genügt. Dabei ist $a = a(x_1, \dots, x_n)$ ein Skalar und K eine Konstante. Setzen wir

$$(29) \quad g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \alpha,$$

so erhalten wir für die Richtungen dx_j der F_{n-1} , für die $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j = 0$ ist,

$$(30) \quad \begin{aligned} d\alpha = \flat \alpha &= 2g^{ik} \frac{\flat^2 \varphi}{\flat x_i \flat x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx_j = 2g^{ik} g_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} K \varphi dx_j \\ &= 2K \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j = 0, \end{aligned}$$

d. h. es ist

$$(31) \quad g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \text{konst.}$$

längs der F_{n-1} (27). Nun sei

$$(32) \quad x_i = x_i(y_1, \dots, y_{n-1})$$

eine Parameterdarstellung von (27), so daß

$$(33) \quad \varphi(x_1(y_1, \dots, y_{n-1}), \dots, x_n(y_1, \dots, y_{n-1})) = \text{konst.}$$

identisch in den y_α gilt (griechische Buchstaben laufen jetzt von 1 bis $l = n-1$).

Daraus folgt

$$(34) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} = 0$$

und weiter durch Differentiation $\left(\frac{D}{Dy_\beta}\right)^1$

1) Die Formel (35) zeigt die Äquivalenz der beiden für eine in P geodätische F_{n-1} charakteristischen Relationen

$$\alpha \beta \eta^i = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\flat^2 \varphi}{\flat x_i \flat x_k} = \alpha_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

(beide für den Punkt P).

$$(35) \quad \frac{b^2 \varphi}{b x_i b x_k} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \alpha \beta \eta^i = 0.$$

Wegen (28) und (34) läßt sich diese Gleichung auch in der Form

$$(36) \quad K g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \alpha \beta \eta^i = 0$$

oder

$$(37) \quad K \varphi \alpha \beta \gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \alpha \beta \eta^i = 0$$

schreiben, wo $\alpha \beta \gamma$ der Maßtensor der F_{n-1} ist. Bezeichnen wir die normierte Normale der F_{n-1} mit ξ_i , so ist

$$(38) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = c \xi_i,$$

wo c nach (31) längs der F_{n-1} eine von Null verschiedene Konstante ist. Für den früher im allgemeinen Fall (§ 1) eingeführten Normalenvektor $\alpha \beta \eta^i$ der F_{n-1} muß eine Darstellung in der Form

$$(39) \quad \alpha \beta \eta^i = \alpha \beta B \xi^i$$

gelten. Da dann

$$(40) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \alpha \beta \eta^i = c \alpha \beta B$$

ist, lautet (37)

$$(41) \quad K \varphi \alpha \beta \gamma + c \alpha \beta B = 0.$$

Nun ist wegen (39)

$$(42) \quad \alpha \beta \eta^i \delta_\varepsilon \eta_i = \alpha \beta B \delta_\varepsilon B,$$

also gilt

$$(43) \quad \alpha \beta \eta^i \delta_\varepsilon \eta_i - \alpha \varepsilon \eta^i \beta \delta \eta_i = \frac{K^2 \varphi^2}{c^2} (\alpha \beta \gamma \delta_\varepsilon \gamma - \alpha \varepsilon \gamma \beta \delta \gamma).$$

Die Relativkrümmung (25)

$$(44) \quad k = \left(\frac{K \varphi}{c} \right)^2$$

der F_{n-1} ist daher *konstant und positiv*. Ist der einbettende R_n von konstanter RIEMANNscher Krümmung, so folgt aus (26), daß auch die F_{n-1} konstante RIEMANNsche Krümmung hat. Für $\varphi = 0$ wird nach (44) auch $k = 0$, und in der Tat ist wegen (28) dann die F_{n-1} eine Ebene E_{n-1} , womit aber nicht gesagt ist, daß nur Ebenen die Relativkrümmung Null haben.

VIII. Spezielle Riemannsche Räume, insbesondere die Räume konstanter Krümmung.

§1. Der Schursche Raum.

Wir haben gesehen, daß die Räume konstanter Krümmung für $n > 2$ als jene RIEMANNschen Räume charakterisiert sind, in denen es unbeschränkt (d. h. durch jeden Punkt in jeder Orientierung) Ebenen E_{n-1} gibt. Die entsprechenden Überlegungen in Abschnitt VI gaben uns aber noch keine Gewißheit von der Existenz der Räume konstanter Krümmung. Zum Nachweis derselben haben wir den Maßtensor in geeignet gewählten Koordinaten anzugeben, so wie z. B. der euklidische R_n erst durch die Angabe $g_{ik} = \delta_{ik}$ in gewissen Koordinatensystemen (den rechtwinklig kartesischen) in Evidenz gesetzt ist.

Ehe wir diese Aufgabe für die Räume konstanter Krümmung lösen, wollen wir jene von F. SCHUR¹⁾ behandelten Räume besprechen, die bloß *in einem Punkte* P_0 das Verhalten der Räume konstanter Krümmung zeigen, nämlich *unbeschränkt (d. h. in jeder Orientierung) Ebenen durch P_0 besitzen*. Wir wollen einen solchen R_n einen SCHURschen R_n und P_0 sein Zentrum nennen.

Wir beziehen den R_n auf RIEMANNsche Normalkoordinaten, deren Zentrum der für den R_n charakteristische Punkt P_0 sei. Wir erinnern zunächst an die wichtigsten Eigenschaften der Normalkoordinaten, die wir in Abschnitt V ausführlich behandelt haben. Bestimmen wir für das folgende $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$, so ist

$$(1) \quad g_{ik}x_k = x_i$$

charakteristisch für ein solches Koordinatensystem (V, § 11). Wir betonen, daß die Existenz eines Normalkoordinatensystems, die hier vorausgesetzt wird, nicht jedem RIEMANNschen R_n zukommen muß. Aus (1) folgt, daß *in* P_0 ($x_i = 0$)

$$(1') \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = 0$$

ist. Die Geodätischen durch P_0 werden durch die linearen Relationen

$$(2) \quad x_i = \xi^i s$$

dargestellt, wo die ξ^i Konstante mit $\xi^i \xi^i = 1$ und s die von P_0 aus gemessene Bogenlänge der Geodätischen (2) bedeuten. Wegen $\frac{dx_i}{ds} = \xi^i$ ist ξ^i die

1) Math. Ann. 27.

Richtung der Geodätischen (2). Aus (1) folgt für diese Richtung $\xi_i = \xi^i$. Wir zeigten, daß die Kurven (2) Geodätische sind, sobald (1) gilt, bringen hier aber einen zweiten Beweis. Aus (1) folgt durch Differentiation nach x_j

$$\delta_{ij} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} x_k + g_{ij}$$

und hieraus $x_j = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} x_i x_k + g_{ij} x_i, \quad x_i = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} x_j x_k + g_{ij} x_j,$

also ist $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} x_i x_k = 0, \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} x_j x_k = 0.$

Daraus folgt $\left[\begin{smallmatrix} ik \\ j \end{smallmatrix} \right] x_i x_k = 0$ und weiter $\left\{ \begin{smallmatrix} ik \\ j \end{smallmatrix} \right\} x_i x_k = 0$. Die Kurven (2) genügen also den Gleichungen $(dx_i = \xi^i ds, d^2 x_i = 0, \xi^i = \frac{x_i}{s})$:

$$(3) \quad d^2 x_j + \left\{ \begin{smallmatrix} ik \\ j \end{smallmatrix} \right\} dx_i dx_k = 0$$

und sind somit Geodätische, w. z. b. w.¹⁾

Es gilt: Wird der Schursche R_n mit dem Zentrum P_0 auf Riemannsche Normalkoordinaten mit dem Zentrum P_0 bezogen, so hat der Maßtensor die Form

$$(4) \quad g_{ik} = \frac{x_i x_k}{s^2} + \gamma(s) \left(\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{s^2} \right),$$

wobei

$$(4') \quad s^2 = x_i x_i, \quad \gamma(0) = 1, \quad \gamma'(0) = 0, \quad \gamma(s) > 0,$$

ist. Hat umgekehrt der Maßtensor eines Riemannschen R_n diese Form, so ist er ein Schurscher R_n mit dem Zentrum $x_i = 0$, bezogen auf Normalkoordinaten.

Zunächst eine Vorbemerkung! Hat in einem Koordinatensystem x_i der Maßtensor die Gestalt (4) und setzen wir $\xi^i = \frac{x_i}{s}$, so ist wegen $s^2 = x_i x_i$

$$\xi^i \xi^i = 1.$$

Wir konstruieren ein euklidisch normiertes n -Bein $(\alpha)_\xi^i$, für das

$$(\alpha)_\xi^i (\beta)_\xi^i = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\alpha)_\xi^i (\alpha)_\xi^k = \delta_{ik}$$

gilt und wobei $\xi^i = (1)_\xi^i$ ist. Daraus folgt

$$\delta_{ik} - \xi^i \xi^k = \sum_{\alpha=2}^n (\alpha)_\xi^i (\alpha)_\xi^k,$$

1) Der Parameter s , auf den die Kurve (2) bezogen ist, ist proportional der Bogenlänge dieser Kurve. Da aber aus (1) $g_{ik} \xi^k = \xi^i$ folgt, so ist $g_{ik} \xi^k \xi^i = \xi^i \xi^i = 1$, d. h. $g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 1$ längs der Geodätischen (2). Der Parameter s ist also die Bogenlänge selbst.

Aus $g_{ik} \xi^k = \xi^i$ in P_0 folgt $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$, aus $\left\{ \begin{smallmatrix} ik \\ j \end{smallmatrix} \right\} \xi^i \xi^k = 0$ in P_0 folgt $\left\{ \begin{smallmatrix} ik \\ j \end{smallmatrix} \right\} = 0$ in P_0 , denn in P_0 sind die Vektoren ξ^i willkürlich.

also wegen (4)

$$(5) \quad g_{ik} = \xi^i \xi^k \div \gamma \sum_{\alpha=2}^n (\alpha) \xi^\alpha (\alpha) \xi^\alpha.$$

Da

$$\begin{vmatrix} (1)\xi^1 & (1)\xi^2 & \dots & (1)\xi^n \\ (2)\xi^1 & (2)\xi^2 & \dots & (2)\xi^n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (n)\xi^1 & (n)\xi^2 & \dots & (n)\xi^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1)\xi^1 & (1)\xi^2 & \dots & (1)\xi^n \\ \gamma(2)\xi^1 & \gamma(2)\xi^2 & \dots & \gamma(2)\xi^n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \gamma(n)\xi^1 & \gamma(n)\xi^2 & \dots & \gamma(n)\xi^n \end{vmatrix} = \gamma^{n-1} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{vmatrix} = g$$

ist, folgt weiter

$$(6) \quad \gamma = \sqrt[n-1]{g}.$$

Durch Überschiebung von (4) mit x_k ergibt sich

$$x_i = g_{ik} x_k.$$

Die vorliegenden Koordinaten sind also RIEMANNSCHE Normalkoordinaten mit dem Zentrum $P_0(0, \dots, 0)$ und mit $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$. Daher ist $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(P_0) = 0$, also in P_0 nach (6)

$$\gamma(0) = 1, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} = \gamma' \frac{\partial s}{\partial x_j} = 0$$

und somit $\gamma'(0) = 0$ wegen der Willkür¹⁾ des Vektors $\frac{\partial s}{\partial x_j} = \frac{x_j}{s}$ in P_0 . (Geht man längs $x_j = \xi^j s$, ξ^j konstant, gegen P_0 , so ist $\frac{x_j}{s} = \xi^j$). Die Bedingungen $\gamma(0) = 1$, $\gamma'(0) = 0$ sind somit aus der Gestalt (4) des Maßtensors g_{ik} ableitbar; sind sie nicht erfüllt, so ist in P_0 g_{ik} und $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}$ unbestimmt.

Wir gehen nun an den Beweis unseres Satzes und erinnern vor allem an die zweite Definition der Ebenen E_{n-1} (VI, § 4): Der normierte Normalenvektor p_i einer E_{n-1} ist ein längs beliebiger Kurven der E_{n-1} parallelverschobener Vektor. Ist $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ die E_{n-1} , so ist also

$$(7) \quad p_i = f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad f = \frac{1}{\sqrt{g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}}}$$

ein längs der Kurven der E_{n-1} parallelverschobener Vektor. Um den Maßtensor g_{ik} der SCHURSCHEM R_n mit dem Zentrum $P_0(0, \dots, 0)$ in RIEMANNSCHEM Normalkoordinaten zu bestimmen, verwenden wir die kanonische Darstellung

$$(8) \quad g_{ik} = (\alpha) \xi^i (\alpha) \xi^k$$

durch ein normiertes n -Bein des R_n . Da ein normiertes n -Bein bei Parallelverschiebung normiert bleibt, so gilt (8), wenn $(\alpha) \xi^i$ ein parallelverschobenes

1) Richtiger: Unbestimmtheit.

n -Bein ist, sobald in irgendeiner Ausgangslage, z. B. in P_0 (für Kurven durch P_0) das n -Bein ${}_{(\alpha)}\xi_i$ normiert ist. Sei also P ein Punkt im Geltungsbereich der Normalkoordinaten und

$$(9) \quad x_i = \xi^i s$$

die ihn mit P_0 verbindende Geodätische. In P_0 sei das normierte n -Bein ${}_{(\alpha)}\xi_i$ dann so gewählt, daß ${}_{(1)}\xi_i = \xi_i$ der Tangentenvektor der Geodätischen (9) in P_0 ist. Dieses normierte n -Bein verschieben wir längs der Geodätischen (9) parallel; da $\xi^i = \xi_i$ längs (9) parallelverschoben ist, so gilt ${}_{(1)}\xi^i = \xi^i$ längs (9) und weiter wegen (8)

$$(10) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k + \sum_{\alpha=2}^n {}_{(\alpha)}\xi_i {}_{(\alpha)}\xi_k$$

in P . Die F_{n-1}

$$(11) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \alpha_i x_i = 0$$

(α_i konstant) enthält alle Geodätischen durch P_0 , deren Richtung in P_0 zu α_i normal ist. Nach Annahme (der E_n hat in P_0 in jeder Orientierung Ebenen E_{n-1}) ist daher (11) eine E_{n-1} , und zwar jene, deren Normalenvektor in P_0 die Richtung α_i hat. Wir betrachten die E_{n-1}

$$(12) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = {}_{(\alpha)}\xi_i(0) x_i = 0, \quad (\alpha \neq 1),$$

für die also $\alpha_i = {}_{(\alpha)}\xi_i(0)$ ist. Dann ist¹⁾

$$(13) \quad \frac{1}{\sqrt{g^{ik} {}_{(\alpha)}\xi_i(0) {}_{(\alpha)}\xi_k(0)}} {}_{(\alpha)}\xi_i(0)$$

nach (7) ein längs jeder Kurve der E_{n-1} (12) parallelverschobener Vektor. Da $\xi^i = {}_{(1)}\xi^i$ in P_0 auf ${}_{(\alpha)}\xi^i$ normal steht, so enthält die E_{n-1} (12) die P_0 mit P verbindende Geodätische (9). Somit ist (13) ein längs (9) parallelverschobener Vektor, dessen Anfangslage (in P_0) ${}_{(\alpha)}\xi_i(0)$ ist, also der von uns mit ${}_{(\alpha)}\xi_i$ bezeichnete Vektor

$$(14) \quad {}_{(\alpha)}\xi_i = \frac{1}{\sqrt{g^{ik} {}_{(\alpha)}\xi_i(0) {}_{(\alpha)}\xi_k(0)}} {}_{(\alpha)}\xi_i(0).$$

Wir zeigen weiter, daß der Normierungsfaktor

$$(15) \quad f(x, {}_{(\alpha)}\xi(0)) = \frac{1}{\sqrt{g^{ik}(x) {}_{(\alpha)}\xi_i(0) {}_{(\alpha)}\xi_k(0)}}, \quad f(0, {}_{(\alpha)}\xi(0)) = 1,$$

für jeden der Vektoren ${}_{(\alpha)}\xi_i$ des parallelverschobenen n -Beins ($\alpha = 2, 3, \dots, n$)

¹⁾ In P_0 ist natürlich $g^{ik}(0) {}_{(\alpha)}\xi_i(0) {}_{(\alpha)}\xi_k(0) = \delta_{ik} {}_{(\alpha)}\xi_i(0) {}_{(\alpha)}\xi_k(0) = 1$, aber nicht außerhalb von P_0 !

gleich ist: $f(x, (2)\xi(0)) = \dots = f(x, (n)\xi(0)) = f(x_1, \dots, x_n)$.¹⁾ Sei $\lambda_i(0)$ ein zu ξ_i senkrechter Einheitsvektor in P_0 ; er hat dann die Darstellung

$$(16) \quad \lambda_i(0) = \sum_{\alpha=2}^n {}_{(\alpha)}\lambda_{(\alpha)\xi_i}(0).$$

Wir orientieren ihn weiter so, daß in (16) kein Koeffizient ${}_{(\alpha)}\lambda$ verschwindet. Verschieben wir $\lambda_i(0)$ längs (9) parallel nach P , so gilt in P

$$(17) \quad \lambda_i = \sum_{\alpha=2}^n {}_{(\alpha)}\lambda_{(\alpha)\xi_i}$$

mit den Koeffizienten ${}_{(\alpha)}\lambda$ von (16). Neben einer zu (14) analogen Darstellung

$$(18) \quad \lambda_i = \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha k} \lambda_\alpha(0) \lambda_k(0)}} \lambda_i(0) = f(x, \lambda(0)) \lambda_i(0) = \sum_{\alpha=2}^n {}_{(\alpha)}\lambda f(x, \lambda(0)) {}_{(\alpha)}\xi_i(0)$$

gilt nach (14) und (17) als zweite Darstellung

$$(19) \quad \lambda_i = \sum_{\alpha=2}^n {}_{(\alpha)}\lambda f(x, {}_{(\alpha)}\xi) {}_{(\alpha)}\xi_i(0).$$

Wegen der Unabhängigkeit der Vektoren ${}_{(\alpha)}\xi_i(0)$ ($\alpha = 2, \dots, n$) ergibt der Vergleich der Koeffizienten in (18) und (19)

$$(20) \quad {}_{(\alpha)}\lambda f(x, {}_{(\alpha)}\xi) = {}_{(\alpha)}\lambda f(x, \lambda(0)),$$

daher wegen ${}_{(\alpha)}\lambda \neq 0$

$$(21) \quad f(x, {}_{(\alpha)}\xi) = f(x, \lambda(0)),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Führen wir ${}_{(\alpha)}\xi_i = f(x_1, \dots, x_n) {}_{(\alpha)}\xi_i(0)$ in die Darstellung (10) ein, so erhalten wir

$$(22) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k + f^2(x) \sum_{\alpha=2}^n {}_{(\alpha)}\xi_i(0) {}_{(\alpha)}\xi_k(0).$$

In P_0 ist $f(0) = 1$ und $g_{ik}(0) = \delta_{ik}$, also gilt dort

$$(23) \quad \delta_{ik} = \xi_i \xi_k + \sum_{\alpha=2}^n {}_{(\alpha)}\xi_i(0) {}_{(\alpha)}\xi_k(0).$$

Für g_{ik} ergibt dies endlich

$$(24) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k + f^2(x) (\delta_{ik} - \xi_i \xi_k).$$

Da $\xi_i = \frac{x_i}{s}$ ist, so ist der Satz bewiesen, wenn noch gezeigt ist, daß $f(x)$ nur vom geodätischen Abstand $s^2 = x_i x_i$ des Punktes P vom Zentrum P_0 abhängt. Zu diesem Zweck wenden wir auf die E_{n-1} $a_i x_i = 0$ das Ebenen-

1) Dieser Normierungsfaktor hängt dann nach (15) nur vom Punkte $P(x_1, \dots, x_n)$ ab.

kriterium (VI, § 4) an, wozu aber die Kenntnis der Christoffelklammern nötig ist. Wir bilden also, indem wir $\gamma = f^2$ setzen,

$$(25) \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} (\delta_{ik} - \xi_i \xi_k) + (1 - \gamma) \left(\xi_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \xi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right).$$

Nun ist

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \left(\frac{x_i}{s} \right)}{\partial x_j} = \frac{1}{s} \delta_{ij} - \frac{1}{s^3} x_i x_j = \frac{1}{s} (\delta_{ij} - \xi_i \xi_j), \quad \frac{\partial s}{\partial x_j} = \frac{x_j}{s} = \xi_j,$$

also

$$(26) \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{1}{s} \Delta_{ij}, \quad \Delta_{ij} = \delta_{ij} - \xi_i \xi_j.$$

Wir erhalten so

$$(27) \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \Delta_{ik} + \frac{1-\gamma}{s} (\xi_i \Delta_{jk} + \xi_k \Delta_{ji}).$$

Wegen $\Delta_{ik} \xi_i = 0$ gilt

$$(28) \quad g_{ik} (\xi_i \xi_l + \gamma^{-1} \Delta_{il}) = (\xi_i \xi_k + \gamma \Delta_{ik}) (\xi_i \xi_l + \gamma^{-1} \Delta_{il}) \\ = \xi_k \xi_l + \Delta_{ik} \Delta_{il} = \xi_k \xi_l + \Delta_{ik} (\delta_{il} - \xi_i \xi_l) = \xi_k \xi_l + \Delta_{kl} = \delta_{kl},$$

woraus

$$(29) \quad g^{il} = \xi_i \xi_l + \gamma^{-1} (\delta_{il} - \xi_i \xi_l)$$

folgt. Für die Christoffelklammer

$$\left\{ \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

erhalten wir aus (27) und (29)

$$(30) \quad \left\{ \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right\} = \Delta_{ij} \left(\frac{1-\gamma}{s} \xi_k - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \xi_k + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \xi_k - \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x_k} \right) \\ + \frac{1}{2\gamma} (\Delta_{ik} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} + \Delta_{jk} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}).$$

Nun ist notwendig und hinreichend, damit (11) eine E_{n-1} ist, daß aus $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = 0$

$$(31) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = 0$$

in jedem Punkte ($x_i = \xi_i s$) von $a_i x_i = 0$ folgt. Es muß also (31) eine Folge von $a_i x_i = 0$ (also auch von $a_i \xi_i = 0$) und von $a_i dx_i = 0$ sein. Nun ist

$$(32) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = - \left\{ \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right\} a_k,$$

da $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = 0$ ist. Nach (30) ist

$$(33) \quad - \left\{ \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right\} a_k dx_i dx_j = \Delta_{ij} dx_i dx_j \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x_k} a_k + A,$$

wo A mit $a_i \xi_i = 0$ und $a_i dx_i = 0$ verschwindet. Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit (11) eine E_{n-1} ist, lautet daher

$$(34) \quad \Delta_{ij} dx_i dx_j \frac{\partial \ln \gamma}{\partial x_k} a_k = 0$$

als Folge von $a_i dx_i = 0$ und $a_i \xi_i = 0$. Bestimmen wir nun dx_i so, daß $a_i dx_i = 0$ und $\xi_i dx_i = 0$ ist (im R_n für $n > 2$ stets möglich!), so folgt aus $a_i \xi_i = 0$ nach (34)

$$(35) \quad dx_i dx_i \frac{\partial \ln \gamma}{\partial x_k} a_k = 0,$$

also

$$(36) \quad \frac{\partial \ln \gamma}{\partial x_k} a_k = 0.$$

Somit ist, da (36) für jedes der Gleichung $a_k \xi_k = 0$ genügende a_k gilt,

$$(37) \quad \frac{\partial \ln \gamma}{\partial x_k} = c \xi_k = c \frac{\partial s}{\partial x_k}.$$

Längs der Flächen $s = \text{konst.}$ ist nach (37) γ konstant, also ist γ eine Funktion von s allein, w. z. b. w.

Da das Ebenenkriterium notwendig und hinreichend ist, so sind die F_{n-1} (11) in dem durch den Maßtensor (4) charakterisierten R_n in der Tat Ebenen E_{n-1} , und daher ist unser Satz bewiesen.¹⁾

Für spätere Zwecke notieren wir die Form der Christoffelklammer $\left\{ \begin{smallmatrix} ij \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, bei Berücksichtigung von $\gamma = \gamma(s)$, $\frac{\partial \gamma}{\partial x_k} = \gamma' \xi^k$:

$$(38) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} ij \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \Delta_{ij} \xi_k \left(\frac{1-\gamma}{s} - \frac{1}{2} \gamma' \right) + \frac{\gamma'}{2\gamma} (\Delta_{ik} \xi_j + \Delta_{jk} \xi_i).$$

§ 2. Kongruenz eines Riemannschen R_n um einen Punkt P_0 .

Wir beziehen wie in § 1 den R_n auf Normalkoordinaten mit dem Zentrum P_0 ; in P_0 sei dabei wieder $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$. Ist P ein Punkt des R_n , so ist

$$(1) \quad x_i = \xi^i s$$

mit konstanten ξ^i und $\xi^i \xi^i = 1$ die Gleichung der Geodätischen, die ihn mit P_0 verbindet. Der Parameter s ist der auf dieser Geodätischen gemessene Abstand (genauer geodätische Abstand) der Punkte P_0 und P .

Man kann (1) als eine *ein-eindeutige Zuordnung der Vektoren des Vektorraumes P_0 zu den Punkten des R_n* auffassen, die im Geltungsgebiet der Normalkoordinaten in bezug auf P_0 liegen.

Von zwei einander ein-eindeutig zugeordneten Punktmenge

$$\{P, Q, \dots\} \quad \text{und} \quad \{\bar{P}, \bar{Q}, \dots\}$$

1) Denn dann gilt (37), und (34) ist eine Folge von $a_k \xi_k = 0$.

des R_n sagen wir, daß sie bezüglich P_0 *gleich orientiert* sind, wenn die den Punkten der beiden Mengen im Vektorraum P_0 entsprechenden Vektoren gleich orientiert sind, d. h. gleiche Längen und Winkel haben, z. B.

$$\text{Länge } P_0P = \text{Länge } P_0\bar{P}, \text{ Winkel } (PP_0Q) = \text{Winkel } (\bar{P}P_0\bar{Q}), \text{ usw.}$$

Haben im R_n dann *irgend* zwei, bezüglich eines Punktes P_0 gleich orientierte, stetig differenzierbare Kurvenbogen stets gleiche Bogenlängen, so sprechen wir von einer Kongruenz um den Punkt P_0 .

Allgemeiner nennen wir die Punktmenge $\{P, Q, \dots\}$ bezüglich P_0 mit der ihr ein-eindeutig zugeordneten Punktmenge $\{\bar{P}, \bar{Q}, \dots\}$ bezüglich \bar{P}_0 gleich orientiert, wenn die entsprechenden Vektoren der Vektorräume P_0 und \bar{P}_0 („entsprechend“ im Sinne der Relation (1), also bei Zugrundelegung eines Normalkoordinatensystems mit dem Zentrum P_0 und eines zweiten mit dem Zentrum \bar{P}_0) gleiche Orientierung besitzen. Haben zwei gleich orientierte Kurvenbogen C und \bar{C} bezüglich P_0 und \bar{P}_0 dann stets die gleiche Bogenlänge, so sprechen wir von einer Kongruenz um die beiden *Zentren* P_0 und \bar{P}_0 .

Die Kongruenz um die zwei Zentren P_0 und \bar{P}_0 bedingt ihrerseits die Kongruenz um jedes der beiden Zentren P_0 und \bar{P}_0 für sich (im Sinne der ersten Definition). Eine weitere, weniger evidente Folge der Kongruenz um zwei Zentren P_0 und \bar{P}_0 ist, wie später gezeigt wird, die Kongruenz um jeden Punkt des R_n .

Es bestehe also Kongruenz um die beiden Zentren P_0 und \bar{P}_0 ; der Fall $P_0 = \bar{P}_0$ sei dabei nicht ausgeschlossen. In P_0 bzw. \bar{P}_0 ordnen wir die beiden normierten n -Beine

$$(2) \quad (a)V^i \text{ bzw. } (a)\bar{V}^i,$$

einander zu. Wegen

$$(3) \quad \xi^i = (a)\xi (a)V^i, \quad \bar{\xi}^i = (a)\xi (a)\bar{V}^i$$

besteht dann eine ein-eindeutige Zuordnung $\xi^i \leftrightarrow \bar{\xi}^i$ der Vektorräume in P_0 und \bar{P}_0 und weiter eine solche $P \leftrightarrow \bar{P}$ der Punkte des R_n , wobei P durch $x_i = \xi^i s$ und \bar{P} durch $\bar{x}_i = \bar{\xi}^i s$, gegeben ist ($(a)\xi (a)\xi = 1$). Dabei sind zugeordnete Kurvenbogen gleich orientiert, haben also *gleiche Bogenlänge*.

Geben wir zugeordneten Punkten gleiche Koordinaten, so werden die Maßtensoren in zugeordneten Punkten gleich sein (d. h. die Komponenten der Maßtensoren sind die nämlichen Funktionen der Koordinaten).

Die RIEMANNsche Krümmung entsprechender F_2 -Elemente in P_0 und \bar{P}_0 ist infolgedessen gleich, und da den normierten n -Beinen (2) weiter keine Bedingungen auferlegt sind, so können sie stets so gewählt werden, daß einem beliebigen vorgegebenen F_2 -Element in P_0 ein ebensolches in \bar{P}_0 entspricht. Demnach aber ist die Krümmung jedes F_2 -Elementes in P_0 gleich der eines bestimmten in \bar{P}_0 und umgekehrt. *Die Riemannschen Krümmungen aller*

F_2 -Elemente in P_0 und \bar{P}_0 sind daher gleich. Für $P_0 = \bar{P}_0$ folgt daraus die Isotropie des R_n in P_0 .¹⁾

Nach dieser Feststellung beweisen wir, daß aus der Kongruenz um den Punkt P_0 des R_n die Existenz aller E_{n-1} durch P_0 folgt und umgekehrt. Zugrunde liegen wie immer Normalkoordinaten mit dem Zentrum P_0 und mit $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$. In P_0 sei das normierte $(n-1)$ -Bein

$$(4) \quad (a)V^i \quad (\alpha=2, \dots, n)$$

gegeben. Wir betrachten die in P_0 geodätische F_{n-1}

$$(5) \quad x_i = \sum_{\alpha=2}^n (a)A_{(\alpha)} V^i$$

und zeigen, daß sie eine Ebene E_{n-1} ist. Sei in P_0 $v_i = v^i$ (es ist $g_{ik}(0) = \delta_{ik}$) der (normierte) Normalenvektor der F_{n-1} (5), der also $(a)V^i$ zu einem normierten n -Bein ergänzt. Ist dann λ^i irgendein Einheitsvektor in P_0 , so gilt

$$(6) \quad \lambda^i = \sum_{\alpha=2}^n (a)\lambda_{(\alpha)} V^i + \varrho v^i, \quad \sum_{\alpha=2}^n ((a)\lambda)^2 + \varrho^2 = 1.$$

Dem Vektor λ^i ordnen wir ein-eindeutig den „gespiegelten“ Vektor

$$(7) \quad \bar{\lambda}^i = \sum_{\alpha=2}^n (a)\lambda_{(\alpha)} V^i - \varrho v^i$$

zu, der dann ebenfalls ein Einheitsvektor ist. Entsprechende Winkel gespiegelter Vektoren sind gleich.

Einem Punkte P mit den Koordinaten $x_i = \xi^i$ s ordnen wir dann den Spiegelpunkt \bar{P} mit den Koordinaten $\bar{x}_i = \bar{\xi}^i$ s zu, wo ξ^i und $\bar{\xi}^i$ gespiegelte Vektoren sind. Auch diese Zuordnung ist ein-eindeutig. Der geometrische Ort der Punkte, die mit ihren gespiegelten identisch sind, ist die F_{n-1} (5). Wegen der Kongruenz um P_0 haben gespiegelte Bogen gleiche Längen, und das Spiegelbild einer Geodätischen ist wieder eine Geodätische. Ist daher eine Geodätische gegeben, die in einem Punkte der F_{n-1} (5) mit dieser eine Richtung gemein hat, so muß sie ganz in der F_{n-1} verlaufen, da es sonst zwei Geodätische des R_n gäbe, die ein Linienelement (Punkt und Richtung) gemeinsam haben. Die F_{n-1} (5) und somit jede solche F_{n-1} durch P_0 ist also eine Ebene. Die Umkehrung folgt aus dem in § 1 bewiesenen Satz durch einfaches Nachrechnen; wir schlagen einen anderen Weg ein und zeigen, daß der auf Normalkoordinaten bezogene SCHURSche R_n mit dem Zentrum P_0 eine „Bewegungsgruppe“ hat, die jedem geometrischen Gebilde ein kongruentes zuordnet und deren Transformationen die Form

$$(8) \quad \bar{x}_i = a_{ik} x_k$$

1) Vgl. die Anmerkung S. 128.

haben, wobei die Matrix $\|a_{ik}\|$ orthogonal ist. Ist x_i, dx_i ein Linienelement und $\bar{x}_i, d\bar{x}_i$ sein transformiertes, gilt also

$$(9) \quad d\bar{x}_i = a_{ik} dx_k,$$

so ist nach (1, 4)

$$(10) \quad \begin{aligned} g_{ik}(\bar{x}) d\bar{x}_i d\bar{x}_k &= [\bar{\xi}_i \bar{\xi}_k (1 - f^2(\bar{s})) + \delta_{ik} f^2(\bar{s})] d\bar{x}_i d\bar{x}_k \\ &= (\bar{\xi}_i d\bar{x}_i)^2 (1 - f^2(\bar{s})) + f^2(\bar{s}) d\bar{x}_i d\bar{x}_i \\ &= (\xi_i dx_i)^2 (1 - f^2(s)) + f^2(s) dx_i dx_i = g_{ik} dx_i dx_k, \end{aligned}$$

da ja $\bar{s} = s, \bar{\xi}_i dx_i = \xi_i d\bar{x}_i, dx_i dx_i = d\bar{x}_i d\bar{x}_i$ ist.

Ein Schurscher R_n mit dem Zentrum P_0 kann also auch durch die Kongruenz um P_0 charakterisiert werden. Einen Punkt P_0 , um den Kongruenz besteht,

nennen wir ein Drehzentrum.

Wir beweisen jetzt den schon erwähnten Satz: Ein R_n mit zwei Drehzentren hat jeden Punkt als Drehzentrum und ist also von konstanter Riemannscher Krümmung. Sind P_0 und \bar{P}_0 Drehzentren (Fig. 7), dann ist jeder Punkt der geodätischen Kugel K_{n-1} mit dem Mittelpunkt P_0 (d. i. der geometrische Ort der Punkte gleichen geodätischen Abstandes vom Mittelpunkt), die durch \bar{P}_0 hindurch-

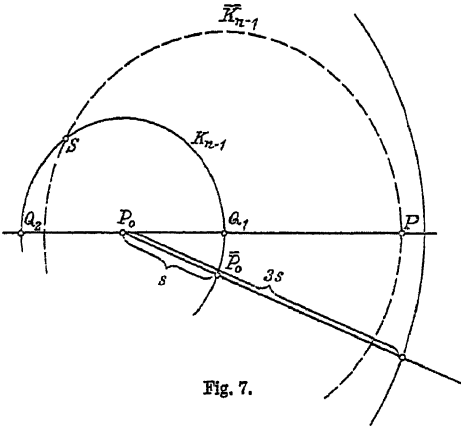


Fig. 7.

geht, ebenfalls ein Drehzentrum. Die geodätische Entfernung der Punkte P_0 und \bar{P}_0 sei s , ferner sei P ein Punkt des R_n , dessen geodätischer Abstand s_1 von P_0 kleiner als $3s$ ist. Die Geodätische durch P_0 und P schneidet die Hyperkugel K_{n-1} in zwei Punkten Q_1 und Q_2 , von denen einer, z. B. Q_1 , auf demselben von P_0 ausgehenden Halbstrahl liegt wie P . Da der geodätische Abstand $\overline{PQ_1}$ der Punkte P, Q_1 kleiner als $2s$ und $\overline{Q_1Q_2} = 2s$ ist, so schneidet die geodätische Kugel \bar{K}_{n-1} mit dem Mittelpunkte Q_1 , die P enthält, sicher die geodätische Kugel K_{n-1} , da ja ein Punkt Q_1 der K_{n-1} innerhalb und ein Punkt Q_2 der K_{n-1} außerhalb der \bar{K}_{n-1} liegt. Ist S ein Punkt des Durchschnittes $\{K_{n-1} \cdot \bar{K}_{n-1}\}$, so ist er als Punkt der K_{n-1} ein Drehzentrum. Da aber auch Q_1 ein Drehzentrum ist, so ist jeder Punkt der Kugelhyperfläche \bar{K}_{n-1} , also auch P ein Drehzentrum. Auf diese Art kann man in endlich vielen Schritten von jedem Punkt P des R_n zeigen, daß er Drehzentrum ist.

§ 3. Fortsetzung.

Der SCHURsche R_n mit dem Zentrum P_0 kann entweder durch die unbeschränkte Existenz der E_{n-1} durch P_0 oder durch die Kongruenz um P_0 charakterisiert werden. Dies gilt für $n > 2$, da ja für $n = 2$ die Definition durch Ebenen E_{n-1} versagt. Der Begriff der Kongruenz um einen Punkt P_0 behält aber auch in diesem Fall seinen Sinn. Es tritt dann allgemein die Frage an uns, ob in RIEMANNschen Normalkoordinaten mit dem Zentrum P_0 der Maßtensor (1, 4) für die Kongruenz um P_0 charakteristisch ist. Hinreichend ist diese Form des Maßtensors g_{ik} jedenfalls; daß sie notwendig ist, soll durch direkte Rechnung gezeigt werden.

Wir setzen also im R_n Kongruenz um P_0 voraus und beziehen ihn auf Normalkoordinaten mit dem Zentrum P_0 und $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$. Dann sind

$$(1) \quad x_i = \xi^s s, \quad \xi^i \xi^s = 1$$

die Gleichungen der Geodätischen durch P_0 . Man kann, wie wir im vorhergehenden Paragraphen zeigten, (1) als eine ein-eindeutige Zuordnung der Punkte des R_n zu den Vektoren des Vektorraumes P_0 auffassen. Zwei ein-eindeutig aufeinander bezogene Punktmengen nannten wir in bezug auf P_0 gleich orientiert, falls dies für die entsprechenden Vektormengen in P_0 zutrifft.

Da im Vektorraum P_0 mit dem Tensor $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$ „rechtwinklig kartesisch“ gemessen wird, so hängen gleich orientierte Vektormengen durch eine orthogonale Transformation

$$(2) \quad \bar{\lambda}^i = a_{ik} \lambda^k, \quad a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}$$

zusammen. Somit sind

$$(3) \quad \bar{x}_i = a_{ik} x_k$$

mit orthogonaler Matrix $\|a_{ik}\|$ die verknüpfenden Relationen für bezüglich P_0 gleichorientierte Punktmengen. Ist $x_i = x_i(t)$ irgendeine stetig differenzierbare Kurve C des R_n , so ist jede in bezug auf P_0 mit C gleichorientierte Kurve \bar{C} durch Gleichungen (3) darstellbar, wo rechterhand $x_k = x_k(t)$ zu setzen ist.

Nun besagt aber die Kongruenz um P_0 , daß die beiden gleichorientierten Kurven gleiche Bogenlängen besitzen. Es muß also

$$(4) \quad g_{ik}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) d\bar{x}_i d\bar{x}_k = g_{ik}(x_1, \dots, x_n) dx_i dx_k$$

oder wegen (3)

$$(5) \quad g_{ik}(a_{1\beta} x_\beta, \dots, a_{n\beta} x_\beta) a_{i\gamma} a_{k\alpha} = g_{\gamma\alpha}(x_1, \dots, x_n)$$

gelten. Durch Überschiebung mit $a_{r\gamma} a_{i\alpha}$ erhalten wir daraus die äquivalente Beziehung

$$(6) \quad g_{ri}(a_{1\beta} x_\beta, \dots, a_{n\beta} x_\beta) = g_{\gamma\alpha}(x_1, \dots, x_n) a_{r\gamma} a_{\alpha i}.$$

Wir wählen nun die a_{ik} , indem wir in P_0 ein normiertes n -Bein $(\alpha)\xi_i = (\alpha)\xi^i$ mit $(1)\xi_i = \xi_i = \frac{x_i}{s}$ (bei Fixierung eines Punktes P mit den Koordinaten $x_i = \xi^i s$) festlegen und

$$(7) \quad a_{ik} = (i)\xi^k$$

setzen. Wegen $x_\beta = s \xi_\beta$ lautet dann (6)

$$(8) \quad g_{r\alpha}(s, 0, \dots, 0) = g_{\mathcal{P}\alpha}(x_1, \dots, x_n)_{(r)\xi^p} (i)\xi^\alpha.$$

Wegen

$$(9) \quad g_{\mathcal{P}\alpha} (1)\xi^p = (1)\xi^\alpha$$

(Normalkoordinaten), ist $g_{\mathcal{P}\alpha} (1)\xi^p (1)\xi^\alpha = 1$, $g_{\mathcal{P}\alpha} (1)\xi^p (\alpha)\xi^\alpha = 0$ ($\alpha = 2, \dots, n$) also, wenn wir $g_{\mathcal{P}\alpha}(s, 0, \dots, 0) = g_{\mathcal{P}\alpha}(s)$ setzen, $g_{11}(s) = 1$, $g_{1\alpha}(s) = 0$.

Aus (8) folgt

$$(10) \quad g_{rr}(s) = g_{\mathcal{P}\alpha}(x)_{(r)\xi^p} (r)\xi^\alpha, \quad g_{tt}(s) = g_{\mathcal{P}\alpha}(x)_{(t)\xi^p} (t)\xi^\alpha \quad \begin{matrix} \text{(nicht summieren)} \\ \text{über } r \text{ und } t \end{matrix}.$$

Vertauscht man nun für $r, t \neq 1$ den r ten mit dem t ten Vektor des normierten Beines, d. h. setzt man $(r)\xi^p = (t)\xi^p$ und $(t)\xi^p = (r)\xi^p$, so folgt, da die linken Seiten von (10) diese Vektoren nicht enthalten,

$$(11) \quad g_{rr}(s) = g_{tt}(s) \quad (r, t = 2, \dots, n).$$

Allgemein ist

$$(12) \quad g_{rr}(s) = g_{\mathcal{P}\alpha}(x) \nu^p \nu^\alpha,$$

wenn nur der Einheitsvektor ν^p in P_0 auf ξ_i normal steht. Denn dann können wir ξ_i, ν_i mittels eines normierten $(n - 2)$ -Beines zu einem normierten n -Bein $(\alpha)\xi^i$, mit $(1)\xi^i = \xi^i$ und $(\alpha)\xi^i = \nu^i$ ergänzen, für das ebenfalls die Relationen (10) gelten. Setzen wir $(r \neq t, r, t \neq 1, a, b \neq 0, a^2 + b^2 = 1)$

$$(13) \quad \nu^p = a (r)\xi^p + b (t)\xi^p,$$

so ist ν^p ein solcher Einheitsvektor, also gilt wegen (11)

$$(14) \quad g_{rr}(s) = (a^2 + b^2) g_{rr}(s) + 2ab g_{\mathcal{P}\alpha}(x)_{(r)\xi^p} (t)\xi^\alpha$$

und somit für $r \neq t$

$$(15) \quad g_{rt}(s) = g_{\mathcal{P}\alpha}(x)_{(r)\xi^p} (t)\xi^\alpha = 0.$$

Nun hat der Maßtensor $g_{ik}(x)$ die Darstellung

$$(16) \quad \begin{cases} g_{ik} = (\alpha\beta)g_{(\alpha)\xi^i} (\beta)\xi^k, \quad \text{wo} \\ (\alpha\beta)g = g_{ik} (\alpha)\xi^i (\beta)\xi^k = g_{\alpha\beta}(s) \end{cases}$$

ist, da ja das n -Bein $(\alpha)\xi_i = (\alpha)\xi^i$ mit seinem adjungierten identisch ist. Wir erhalten somit

$$(17) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k + f^2(s) \sum_{\alpha=2}^n (\alpha)\xi_i (\alpha)\xi_k,$$

wo wir mit $f^2(s)$ den gemeinsamen Wert (11) bezeichnen. Wegen $\sum_{\alpha=1}^n {}_{(\alpha)}\xi_i {}_{(\alpha)}\xi_k = \delta_{i,k}$ gewinnen wir in der Tat die Form (1, 4), d. h.

$$(18) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k + f^2(s) (\delta_{ik} - \xi_i \xi_k).$$

Wir bringen noch einige ergänzende Bemerkungen.

A. Für den R_2 ist

$$(19) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k + \gamma(x_1, x_2) (\delta_{ik} - \xi_i \xi_k), \quad \gamma(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0, 0) = 0$$

die allgemeinste Form des Maßtensors in Normalkoordinaten mit dem Zentrum $(0, 0)$. Wählen wir in einem Punkte P mit den Koordinaten $\xi^i s$ ein normiertes Zweibein so, daß $\xi_i = {}_{(1)}\xi_i$ ist, so gilt, wenn wir $\eta_i = {}_{(2)}\xi_i$ setzen,

$$(20) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k + \eta_i \eta_k.$$

Bezeichnet ζ_i einen Vektor, der mit ξ_i „rechtwinklig kartesisch“ gemessen ein normiertes Zweibein liefert, so gilt

$$\delta_{ik} = \xi_i \xi_k + \zeta_i \zeta_k, \quad \xi_i \zeta_i = 0, \quad \zeta_i \zeta_i = 1.$$

Aus $0 = \xi_1 \zeta_1 + \xi_2 \zeta_2$ und $0 = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2$ (wegen $\xi_i = \xi^i$) aber folgt

$$\zeta_i = f^{-1}(x_1, x_2) \eta_i, \quad \text{also} \quad \delta_{ik} = \xi_i \xi_k + f^{-2}(x_1, x_2) \eta_i \eta_k,$$

was in (20) eingesetzt die Form (19) des Maßtensors ergibt.

Der Riemannsche R_2 ist also in Normalkoordinaten durch eine Funktion $f(x_1, x_2)$ der Koordinaten charakterisiert.

B. Wir haben immer von Hyperebenen E_{n-1} gesprochen und die Frage nicht erörtert, ob der Charakter des SCHURSchen R_n mit dem Zentrum P_0 auch durch die unbeschränkte Existenz aller r -dimensionalen Ebenen E_r festgelegt ist, wobei r eine feste Zahl $1 < r < n$ ist. Daß diese Frage zu bejahen ist, folgt aus dem Satz: *Die Existenz aller E_r (r fest) durch P_0 bedingt die aller E_t (t beliebig) durch P_0 .*

Jede E_r durch P_0 hat im Vektorraum P_0 als „Orientierung in P_0 “ ihren Tangentenraum daselbst, und es besteht eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Ebenen E_r durch P_0 und den ihnen in P_0 entsprechenden Tangentenräumen. Dem Schnitt zweier Ebenen E_s und E_t durch P_0 entspricht dabei als Vektorraum in P_0 der Schnitt der den Ebenen E_s und E_t in P_0 entsprechenden Tangentenräume. Aus der Existenz aller E_r durch P_0 folgt daher durch Schnittbildung die der E_s für $s \leq r$, also auch die aller E_2 . Umgekehrt zeigen wir, daß die Existenz aller E_2 durch P_0 die aller E_r durch P_0 ($r > 2$) nach sich zieht. Die Existenz der E_2 vorausgesetzt, sei ${}_{(\alpha)}V^i$ ($\alpha = 1, \dots, r; 2 < r \leq n-1$) in P_0 ein normiertes r -Bein des auf Normalkoordinaten mit dem Zentrum

P_0 bezogenen R_n . Die Gesamtheit der Geodätischen durch P_0 , deren Richtungen in P_0 dem Vektorraum $(\alpha)V^i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) angehören, ist eine E_r dieser Orientierung. Denn in der Tat bestimmen ja irgend zwei nicht bereits in einer solchen Geodätischen liegende Punkte dieser Fläche zwei Geodätische durch P_0 , deren Richtungen in P_0 einen in $(\alpha)V^i$ ($\alpha = 1, \dots, r$) gelegenen zwei-dimensionalen Vektorraum bestimmen, also eine E_2 , die ganz in der E_r liegt. Da die beiden Punkte der E_2 angehören, so liegt die sie verbindende Geodätische in der E_2 , also in der E_r , d. h. diese ist eine Ebene, w. z. b. w.

C. Jede E_r des R_n konstanter Krümmung ist als RIEMANNscher R_r von konstanter Krümmung. Denn seien C_1 und C_2 zwei Bogen der E_r , die in bezug auf zwei Punkte P_0 und \bar{P}_0 der E_r gleich orientiert sind, so sind sie ja als Bogen des R_n in bezug auf die beiden Punkte P_0 und \bar{P}_0 des R_n gleich orientiert und haben daher dieselbe Bogenlänge. Die Krümmung dieses R_r ($\equiv E_r$) ist genau die des R_n . Wir zeigen allgemeiner, daß eine in ihrem Punkte P_0 geodätische F_r eines (beliebigen) R_n in P_0 längs jeder ihrer F_2 -Elemente (Flächenelemente) durch P_0 dieselbe Krümmung hat wie der R_n .¹⁾ Dabei verstehen wir (enger als in VII, § 2) unter einer in P_0 geodätischen F_r die Menge aller Punkte der Geodätischen, deren Richtungen in P_0 einen r -dimensionalen Vektorraum bilden.

Beziehen wir den R_n auf Normalkoordinaten mit dem Zentrum P_0 , so können wir durch eine Transformation $\bar{x}_i = \alpha_{ik}x_k$, wo die $\|\alpha_{ik}\|$ eine orthogonale Matrix bilden, stets erreichen, daß in den neuen Normalkoordinaten

$$(21) \quad x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 0, \dots, x_n = 0$$

die Gleichung der F_r ist. Dann ist

$$(21^*) \quad x_i = y_i, \quad (i=1, \dots, r) \quad \text{und} \quad x_{r+\alpha} = 0 \quad (\alpha=1, \dots, n-r)$$

eine Parameterdarstellung $x_i = x_i(y_1, \dots, y_r)$ dieser F_r . Der Maßtensor γ_{ik} ($i, k = 1, \dots, r$) der F_r ist dann

$$(22) \quad \gamma_{ik}(y_1, \dots, y_r) = g_{ik}(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \quad (i, k = 1, \dots, r).$$

Da in P_0 ($y_1 = \dots = y_r = 0$) $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial y_j} = 0$ gilt, ist

$$(23) \quad \Gamma_{ijkl}(P_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \gamma_{jk}}{\partial y_i \partial y_l} + \frac{\partial^2 \gamma_{il}}{\partial y_j \partial y_k} - \frac{\partial^2 \gamma_{jl}}{\partial y_i \partial y_k} - \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial y_j \partial y_l} \right]_{P_0} \quad (i, j, k, l = 1, \dots, r)$$

der RIEMANNsche Krümmungstensor der F_r in P_0 , so daß

$$\Gamma_{ijkl}(P_0) = R_{ijkl}(P_0) \quad (i, j, k, l = 1, \dots, r)$$

1) Wir haben dies in VII, § 3 unter Benutzung des verallgemeinerten RICEKalküls nachgewiesen; einen Beweis ohne Verwendung dieses Kalküls kann man ohne größere Rechnung nur in spezialisierten Koordinaten bringen.

ist. Für irgendein in P_0 durch zwei Vektoren λ^i, μ^i aufgespanntes F_2 -Element der F_r

$$(24) \quad \lambda^i = 0, \mu^i = 0 \quad \text{für } i > r$$

ist demnach die Krümmung im R_n und die in der F_r die gleiche.

D. Sei ein SCHURscher R_n mit dem Zentrum P_0 wie immer auf Normalkoordinaten bezogen. Durch ein normiertes Zweibein λ^i, μ^i in P_0

$$(25) \quad \lambda^i \lambda^i = \mu^i \mu^i = 1, \quad \lambda^i \mu^i = 0, \quad (g_{ik}(P_0) = \delta_{ik})$$

wird in P_0 die E_2

$$(25') \quad x_i = x_i(s, \varphi) = \lambda^i s \cos \varphi + \mu^i s \sin \varphi$$

aufgespannt. Die Parameter s und φ mögen die *Polarkoordinaten* in der E_2 heißen. Dabei sind die Kurven $s = \text{konst.}$ geodätische Kreise (geometrischer Ort aller Punkte des geodätischen Abstandes s von P_0), und die Kurven $\varphi = \text{konst.}$ die ∞^1 Geodätischen der E_2 durch P_0 , die die E_2 (25') erfüllen.

Wir wollen jetzt das Bogenelement $d\sigma$ der E_2 in Polarkoordinaten aufstellen. Dazu benötigen wir noch die Formel

$$(26) \quad dx_i = \lambda^i (ds \cos \varphi - s \sin \varphi d\varphi) + \mu^i (ds \sin \varphi + s \cos \varphi d\varphi).$$

Wegen (25) gilt dann

$$(27) \quad x_i dx_i = s ds, \quad dx_i dx_i = ds^2 + s^2 d\varphi^2;$$

nach (1, 4) ist somit

$$d\sigma^2 = g_{ik} dx_i dx_k = \frac{(x_i dx_i)^2}{s^2} + \gamma(s) \left(dx_i dx_i - \frac{(x_i dx_i)^2}{s^2} \right) = ds^2 + \gamma(s) s^2 d\varphi^2,$$

oder

$$(28) \quad d\sigma^2 = ds^2 + f^2(s) s^2 d\varphi^2,$$

wo wir $f^2(s)$ für das stets positive $\gamma(s)$ setzten. Das Parameternetz der Polarkoordinaten ist orthogonal ($g_{12} = 0$).

§ 4. Der R_n konstanter Krümmung.

Wir sind jetzt in der Lage, die Form des Maßtensors für Räume konstanter Krümmung, bezogen auf Normalkoordinaten mit irgendeinem Zentrum P_0 , anzugeben. Es handelt sich dabei darum, die in (3, 18) auftretende Funktion $f(s)$ zu bestimmen.

Wir gehen von der Tatsache aus, daß jede in einen R_n eingebettete E_r in jedem Punkte und für jedes F_2 -Element durch diesen Punkt dieselbe RIEMANNsche Krümmung wie der R_n hat.

Es sei P_0 der Ursprung RIEMANNscher Normalkoordinaten. Durch ein normiertes Zweibein λ^i, μ^i in P_0 wird die zweidimensionale Ebene

$$(1) \quad x_i = \lambda^i s \cos \varphi + \mu^i s \sin \varphi$$

aufgespannt, die wir auf Polarkoordinaten $u_1 = s, u_2 = \varphi$ beziehen. Dann hat der Maßtensor $g_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) nach (3, 28) die Gestalt

$$(2) \quad g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = s^2 f^2(s).$$

Die RIEMANNsche Krümmung eines auf rechtwinklige Koordinaten ($g_{12} = 0$) bezogenen R_2 ist aber nach einer im ersten Band (V, § 3) hergeleiteten Formel

$$(3) \quad k = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right) \right],$$

also wegen (2)

$$(4) \quad k = -\frac{1}{s f} \frac{d}{ds} (s f' + f),$$

so daß¹⁾

$$(5) \quad s f'' + 2 f' + s k f = 0$$

die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die unbekannte Funktion $f(s)$ ist, die wir nach (1, 4) für die Anfangswerte $f(0) = 1, f'(0) = 0$ zu lösen haben. Setzen wir in (5)

$$(6) \quad \psi = s f,$$

so folgt wegen

$$(6') \quad \psi' = s f' + f, \quad \psi'' = s f'' + 2 f'$$

aus (5)

$$(7) \quad \psi'' + k \psi = 0$$

als Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\psi(s)$, die wir für die Anfangswerte $\psi(0) = 0, \psi'(0) = 1$ zu lösen haben.

Wir behandeln zunächst den *euklidischen Fall* $k = 0$. Für $k = 0$ wird $\psi = s$, also $f = 1$; für den Maßtensor (1, 4)

$$(8) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k + f^2(s) (\delta_{ik} - \xi_i \xi_k)$$

ergibt das

$$(8') \quad g_{ik} = \delta_{ik}.$$

Die Normalkoordinaten des euklidischen R_n mit $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$ sind nichts anderes als die geläufigen rechtwinkligen kartesischen Koordinaten.

Ist $k \neq 0$, so ist

$$(9) \quad \psi(s) = \frac{e^{\sqrt{-k}s} - e^{-\sqrt{-k}s}}{2\sqrt{-k}}$$

1) Man ersieht aus (4), daß auch der SCHURSche R_n durch die Angabe der Krümmung k als Funktion des geodätischen Abstandes vom Zentrum P_0 ($k = k(s)$) völlig bestimmt ist.

die Lösung von (7) für die angegebenen Anfangswerte. Wir haben demnach zwei wesentlich verschiedene Fälle, je nachdem die konstante Raumkrümmung k positiv oder negativ ist.

A. Positives k : Dann ist

$$(9') \quad \psi(s) = \frac{\sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}},$$

also

$$(10) \quad f(s) = \frac{\sin(\sqrt{k}s)}{\sqrt{k}s},$$

und der Maßtensor (1, 4) lautet

$$(11) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k + \frac{\sin^2(\sqrt{k}s)}{k s^2} (\delta_{ik} - \xi_i \xi_k).$$

B. Negatives k : Führt man $\text{sh } \tau = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2}$ ein, so wird

$$(12) \quad \psi(s) = \frac{1}{\sqrt{-k}} \text{sh}(\sqrt{-k}s),$$

also

$$(13) \quad f(s) = \frac{\text{sh}(\sqrt{-k}s)}{\sqrt{-k}s},$$

und der Maßtensor (1, 4) lautet

$$(14) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k - \frac{\text{sh}^2(\sqrt{-k}s)}{k s^2} (\delta_{ik} - \xi_i \xi_k).$$

Gibt es Räume konstanter Krümmung, so hat der Maßtensor eines solchen in Normalkoordinaten die Form (8'), (11) oder (14), je nachdem $k = 0$, $k > 0$ oder $k < 0$ ist. Ob nun die so gewonnenen RIEMANNschen Räume tatsächlich von konstanter Krümmung sind, kann man entweder durch die etwas langwierige direkte Rechnung nachweisen oder aber durch Schlüsse anderer Natur, z. B. durch den Nachweis der unbeschränkten Existenz von Ebenen, aus der dann die Kongruenz um jeden Punkt und weiter die Konstanz der Raumkrümmung folgt.

Wir gehen im folgenden diesen Weg, untersuchen aber zunächst den Geltungsbereich der Normalkoordinaten für die durch (8'), (11) und (14) gegebenen Räume. Aus (8) folgt für das quadrierte Bogenelement $d\sigma^2$

$$(15) \quad d\sigma^2 = (\xi_i dx_i)^2 + f^2(s) [dx_i dx_i - (\xi_i dx_i)^2],$$

wo

$$(15') \quad f^2(s) \begin{cases} = 1 & \text{für } k = 0 \\ = \frac{\sin^2(\sqrt{k}s)}{k s^2} & \text{für } k > 0 \\ = \frac{\text{sh}^2(\sqrt{-k}s)}{-k s^2} & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

ist. Nun ist nach der bekannten SCHWARZschen Ungleichung

$$(\xi_i dx_i)^2 \leq (\xi_i \xi_i)(dx_i dx_i) = dx_i dx_i;$$

für $dx_i \neq 0$ ist also $d\sigma^2$ nur Null, wenn zugleich $f^2(s) = 0$ und $\xi_i dx_i = 0$ ist. Für reelle s (andere haben keine Bedeutung) tritt dies nur für $k > 0$ ein, und zwar zum ersten Male für

$$(16) \quad s = \frac{\pi}{\sqrt{k}}.$$

Die Normalkoordinaten können nur bis zu dieser Hyperkugelfläche¹⁾ (sie enthält die Punkte des geodätischen Abstandes $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ vom Zentrum P_0) funktionieren. Während also für $k \leq 0$ keine Einschränkung betreffs des Geltungsbereiches der Normalkoordinaten besteht, muß für $k > 0$

$$(16') \quad k x_i x_i < \pi^2$$

sein. Wir erfassen diesen Tatbestand sofort, wenn wir zeigen, daß der RIEMANNsche R_n mit der positiven Krümmung k als solcher mit der in einem euklidischen R_{n+1} eingebetteten n dimensionalen Kugel vom Radius $a = \frac{1}{\sqrt{k}}$ identisch ist. Es sei der euklidische R_{n+1} auf rechtwinklige kartesische Koordinaten y_1, \dots, y_{n+1} bezogen und

$$(17) \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n+1}^2 = a^2$$

eine n dimensionale Kugel. Den Punkt O_1 mit den Koordinaten $y_1 = 0, \dots, y_n = 0, y_{n+1} = a$ machen wir zum Zentrum von Normalkoordinaten x_1, \dots, x_n auf der Kugel. Sei ξ^i ($i = 1, \dots, n+1$) ein Einheitsvektor des Tangentenraumes in O_1 , so gilt wegen $\xi^{n+1} = 0$ (dies charakterisiert diesen Vektorraum)

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i)^2 = 1.$$

In O_1 wird durch den Vektor ξ^i und den in die y_{n+1} -Achse gerichteten Einheitsvektor $\delta_{i,n+1}$ ($i = 1, \dots, n+1$) eine E_2 bestimmt, die die Kugel in einem größten Kreise (also einer Geodätischen) schneidet, dessen Richtung in O_1 eben dieser Vektor ξ^i ist.

Unter dem geodätischen Abstand s eines Punktes P dieses Kreises von O_1 verstehen wir den kleineren der beiden Bogen $\widehat{O_1 P}$. Dann sind

$$x_i = \xi^i s \quad (i = 1, \dots, n)$$

die Normalkoordinaten des Punktes P .

Sei η^i der euklidische Vektor²⁾ der Länge a , der in der E_2 liegend vom Kugelmittelpunkte $y_1 = \dots = y_{n+1} = 0$ nach $P(y_1, \dots, y_{n+1})$ gerichtet ist. Sein

1) Richtiger „Pseudosphäre“, denn sie artet in einen Punkt aus, den Pol von P_0 .

2) Vektor in bezug auf die Gruppe der euklidischen Drehungen um $x_i = 0$.

Winkel mit der y_{n+1} -Achse (beziehungsweise dem Vektor $\delta_{i, n+1}$) ist $\frac{s}{a}$, und somit gilt die Darstellung

$$(18) \quad \eta^i = a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \xi^i + a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \delta_{i, n+1} \quad (i=1, \dots, n+1)$$

Die Vektorgleichung (18) kann auch

$$(18') \quad \begin{cases} y_i = a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \xi^i \\ y_{n+1} = a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \end{cases} \quad (i=1, \dots, n)$$

geschrieben werden, da $\eta^i = y_i$ ($i=1, \dots, n+1$) ist. Aus (18') bilden wir nach (1, 26)

$$(19) \quad \begin{cases} dy_i = \frac{a}{s} \sin\left(\frac{s}{a}\right) \Delta_{ik} dx_k + \cos\left(\frac{s}{a}\right) \xi^i ds, & \Delta_{ik} = \delta_{ik} - \xi^i \xi^k \\ dy_{n+1} = -\sin\left(\frac{s}{a}\right) ds \end{cases}$$

und erhalten für das Bogenelement der Kugel nach (19)

$$d\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n+1} dy_i^2 = ds^2 + \frac{a^2 \sin^2 \frac{s}{a}}{s^2} \Delta_{ik} \Delta_{il} dx_k dx_l, \quad (\Delta_{ik} \xi^i = 0).$$

Wegen $\Delta_{ik} \Delta_{lj} = \Delta_{ik} \delta_{lj} = \Delta_{kj}$ und $\xi^k dx_k = ds$ folgt weiter

$$(20) \quad d\sigma^2 = \left[\xi^k \xi^j + \frac{a^2 \sin^2\left(\frac{s}{a}\right)}{s^2} (\delta_{kj} - \xi^k \xi^j) \right] dx_k dx_j,$$

also

$$(20') \quad g_{kj} = \frac{x_k x_j}{s^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{s}{a}\right)}{\left(\frac{s}{a}\right)^2} \left(\delta_{kj} - \frac{x_k x_j}{s^2} \right),$$

d. h. die Kugelfläche hat, wenn wir jetzt $a = \frac{1}{\sqrt{k}}$ setzen, in der Tat den Maßtensor (11).

Mit der Feststellung der Identität des RIEMANNschen R_n konstanter positiver Krümmung mit der n dimensionalen Kugel eines euklidischen R_{n+1} ¹⁾

1) Es soll damit keineswegs gesagt sein, daß die Kugel als einzige geschlossene Mannigfaltigkeit die Maßform des R_n konstanter positiver Krümmung besitzt. Identifiziert man vielmehr auf ihr diametral gegenüberliegende Punkte, so erhält man wieder eine geschlossene Mannigfaltigkeit derselben positiven Krümmung, aber topologisch verschiedener Natur.

Aber auch differentialgeometrisch zeigt diese Fläche von der Kugel abweichende Eigenschaften. Vor allem bestimmen nun zwei Punkte ausnahmslos die sie enthaltende Geodätische, ferner sind die Geodätischen wie auf der Kugel geschlossen, haben aber die halbe Länge von denen der Kugel.

ist unser Interesse für die Räume konstanter positiver Krümmung eigentlich erschöpft. Wir werden aber unsere Vertrautheit mit solchen Räumen benutzen, um einen Schluß zu ziehen, der uns auch für die Räume konstanter negativer Krümmung ein wichtiges Ergebnis liefert; und zwar handelt es sich um die Aufstellung der Gleichungen der Ebenen E_{n-1} .

Wir erhalten ja diese E_{n-1} auf der Kugel (17) durch den Schnitt mit einer den Kugelmittelpunkt enthaltenden E_n

$$(21) \quad \sum_{i=1}^{n+1} A_i y_i = 0.$$

Wollen wir demnach die Gleichung in den Normalkoordinaten x_1, \dots, x_n haben, so sind nur die Werte (18') in (21) einzuführen. Somit ist

$$(22) \quad A_i \xi_i \tan \frac{s}{a} + A_{n+1} = 0$$

oder

$$(22') \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = A_i \xi_i \tan \frac{s}{a} = \text{konst.}, \quad (\xi_i = \xi^i = \frac{x_i}{s}),$$

die Gleichung der E_{n-1} in Normalkoordinaten.

Wir bezeichnen, um beide Fälle $k > 0$ und $k < 0$ unter einem behandeln zu können, die Funktionen $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ und die Hyperbelfunktionen $\text{sh } \alpha$, $\text{ch } \alpha$, $\text{th } \alpha$ einheitlich mit $\text{Sin } \alpha$, $\text{Cos } \alpha$, $\text{Tan } \alpha$. Setzen wir noch $\sigma = \sqrt{|k|} s$, so haben die Maßtensoren (11) und (14) die einheitliche Form

$$(23) \quad g_{ik} = \xi_i \xi_k + \frac{\text{Sin}^2 \sigma}{\sigma^2} (\delta_{ik} - \xi_i \xi_k).$$

Nun haben wir für $k > 0$ bereits gezeigt, daß $(a = \frac{1}{\sqrt{k}})$

$$(24) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = A_i \xi_i \text{Tan } \sigma = \text{konst.}$$

die Gleichungen der E_{n-1} unseres R_n konstanter positiver Krümmung sind; wir vermuten und werden dies bestätigt finden, daß (24) auch für den R_n konstanter negativer Krümmung die Gleichungen der E_{n-1} sind.

Wir führen den Ebenennachweis für beide Fälle $k > 0$, $k < 0$ gemeinsam durch. Es sei dabei festgesetzt, daß, sobald in einer Formel ein doppeltes Vorzeichen vorkommt ($\dots \pm A, \dots \mp A$), das obenstehende Zeichen dem Fall $k > 0$ und das untenstehende dem Fall $k < 0$ entspricht. Beispielsweise ist

$$\sigma = s\sqrt{\pm k}.$$

Nach dem allgemeinen Ebenenkriterium muß (notwendig und hinreichend), damit $\varphi(x_1, \dots, x_n) = c$ eine Ebene ist,

$$(25) \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ j \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dx_i dx_k = 0$$

aus $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = 0$ und $\varphi = c$ folgen.¹⁾ Für die Rechnung benötigen wir die Christoffelklammern $\left\{ \begin{smallmatrix} i j \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, die wir uns aus (1, 38) verschaffen. Dabei ist jetzt $\gamma = \frac{\sin^2 \sigma}{\sigma^2}$. Wir erhalten

$$(26) \left\{ \begin{smallmatrix} i k \\ j \end{smallmatrix} \right\} = A_{ik} \xi_j \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\sin \sigma \cos \sigma}{\sigma^2} \right) \sqrt{\pm k} + (A_{ij} \xi_k + A_{kj} \xi_i) \left(\frac{1}{\tan \sigma} - \frac{1}{\sigma} \right) \sqrt{\pm k}.$$

Ferner haben wir die Ableitungen der Funktion (24) nach den Koordinaten zu bilden. Bei Verwendung der Formeln

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \xi_i = \xi^i, \quad \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \frac{1}{s} A_{ki}, \quad A_{ki} = \delta_{ki} - \xi_k \xi_i$$

erhalten wir

$$(27) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \left[\frac{A_i}{\sigma} \tan \sigma - \varphi \xi_i \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sin \sigma \cos \sigma} \right) \right] \sqrt{\pm k},$$

oder wegen $\xi_i \xi_i = 1$

$$(28) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \xi_i = \frac{\varphi}{\sin \sigma \cos \sigma} \sqrt{\pm k}.$$

Die weitere Differentiation von (27) liefert

$$(29) \quad \pm \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{A_i}{\sigma^2} \xi_k \tan \sigma + \frac{A_i \xi_k}{\sigma \cos^2 \sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \xi_i \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sin \sigma \cos \sigma} \right) \\ - \varphi \frac{A_{ik}}{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sin \sigma \cos \sigma} \right) + \varphi \frac{\xi_i \xi_k}{\sigma^2} - \frac{\varphi \xi_i \xi_k}{\sin^2 \sigma} \pm \frac{\varphi \xi_i \xi_k}{\cos^2 \sigma}.$$

Nun ist $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = 0$ nach (27) gleichbedeutend mit

$$(30) \quad \frac{A_i dx_i}{\sigma} \tan \sigma = \varphi \xi_i dx_i \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sin \sigma \cos \sigma} \right).$$

Für die Differentiale dx_i , für die (30), also $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = 0$ gilt, liefert (29)

$$(31) \quad \pm \frac{1}{k \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k = (\xi_i dx_i)^2 \left(\frac{1}{\sigma \sin \sigma \cos \sigma} - \frac{2}{\sin^2 \sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \right) \\ - \frac{dx_i dx_i}{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sin \sigma \cos \sigma} \right).$$

Ebenso gilt nach (26), (27) und (28)

$$(32) \quad \pm \frac{1}{k \varphi} \left\{ \begin{smallmatrix} i k \\ j \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = A_{ik} \frac{1}{\sin \sigma \cos \sigma} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\sin \sigma \cos \sigma}{\sigma^2} \right) \\ - 2 \left(\frac{1}{\tan \sigma} - \frac{1}{\sigma} \right) \xi_i \xi_k \frac{1}{\sin \sigma \cos \sigma} + (\dots) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + (\dots) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k},$$

1) Im folgenden Paragraphen geben wir einen analogen, aber weniger Rechnung erfordern den Beweis; dieser mag ruhig überschlagen werden. Was die Prämisse $\varphi = c$ betrifft, so besagt sie infolge der Willkür von c in unserem Fall nichts.

also für die Richtungen dx_i , für die $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = 0$ ist,

$$(33) \quad \pm \frac{1}{k\varphi} \left\{ \begin{matrix} ik \\ j \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_i dx_k = - \frac{dx_i dx_k}{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sin \sigma \cos \sigma} \right) + (\xi_i dx_i)^2 \left(\frac{1}{\sigma \sin \sigma \cos \sigma} - \frac{2}{\sin^2 \sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \right).$$

Somit gilt

$$(34) \quad \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ j \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] dx_i dx_k = 0$$

als Folge von $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = 0$, w. z. b. w.

Zu n Punkten

$$(35) \quad x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)}$$

gibt es, falls ihre Determinante nicht verschwindet, nach (24) genau eine sie enthaltende E_{n-1} . Demnach gibt es genau eine E_{n-1} , die in einem Punkte des R_n eine vorgegebene Orientierung ($n - 1$ -Bein in dem Punkt) besitzt. Das bedeutet aber die unbeschränkte Ebenenexistenz, also die konstante Krümmung unseres R_n .

§ 5. Die projektiven Koordinaten im R_n konstanter Krümmung. Die Bewegungsgruppen.

Wir wollen ein Koordinatensystem *projektiv* nennen, wenn in ihm die Gleichungen der Geodätischen die lineare Gestalt $x_i = a_i t + b_i$ mit konstanten a_i und b_i annehmen. Ist x_1, \dots, x_n ein projektives Koordinatensystem, so ist jedes durch eine Transformation der projektiven Gruppe daraus entstehende Koordinatensystem ebenfalls projektiv, womit der Name „projektives Koordinatensystem“ seine Rechtfertigung findet.

Nur die Räume konstanter Krümmung können auf projektive Koordinaten bezogen werden, denn ist $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ ein solches Koordinatensystem, so stellt

$$A_i \bar{x}_i = \text{konst.}$$

mit beliebigen konstanten A_i eine Ebene E_{n-1} dar, d. h. im betreffenden R_n gibt es E_{n-1} in jeder Orientierung. Um in unserem (auf Normalkoordinaten x_i bezogenen) R_n konstanter Krümmung projektive Koordinaten \bar{x}_i einzuführen, genügt es, die Transformation

$$(1) \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{s} \tan \sigma, \quad \sigma = \sqrt{\pm k s}, \quad s^2 = x_i x_i$$

vorzunehmen. Nach (4, 24) ist dann

$$(2) \quad A_i \bar{x}_i = \text{konst.}$$

mit konstanten A_i die allgemeine Gleichung einer Ebene E_{n-1} .

Für $k > 0$ gilt wegen $\text{Tan } \sigma = \tan \left(\sqrt{k} s \right)$ die Transformation (1) nur im Bereiche

$$(3) \quad 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2\sqrt{k}}.$$

Das gewonnene Bezugssystem ist ein spezielles unter den verschiedenen projektiven, es ist in dem Sinne das einfachste, daß in ihm die Gleichungen der Bewegungsgruppe eine ebenso einfache als übersichtliche Gestalt annehmen. Man überlege die geometrische Bedeutung der Transformation (1) an der im euklidischen R_{n+1} liegenden, den R_n konstanter positiver Krümmung repräsentierenden Kugel. Die Koordinaten \bar{x}_i sind (bis auf den Faktor $-\frac{1}{\sqrt{k}}$) rechtwinklige kartesische Koordinaten in der die Kugel­fläche im Pol von O_1 tangierenden E_n , vom Kugelmittelpunkt auf die obere Halbkugel (3) projiziert.¹⁾

Als erstes und wichtigstes haben wir den Maßtensor \bar{g}_{ik} im neuen Bezugssystem zu berechnen. Setzen wir $\xi_i = \frac{\bar{x}_i}{s}$, so folgt aus (1) und (1, 26)

$$(4) \quad \begin{aligned} d\bar{x}_i &= \frac{\Delta_{ij}}{s} \text{Tan } \sigma dx_j + \frac{\xi_i \xi_j}{\text{Cos}^2 \sigma} \sqrt{\pm k} dx_j, \\ &= \frac{\sqrt{\pm k}}{\text{Cos}^2 \sigma} \left(\xi_i \xi_j + \frac{1}{\sigma} \text{Sin } \sigma \text{Cos } \sigma \Delta_{ij} \right) dx_j, \end{aligned}$$

wo $\Delta_{ij} = \delta_{ij} - \xi_i \xi_j$ ist.

Setzen wir für den Augenblick $\alpha = \frac{1}{\sigma} \text{Sin } \sigma \text{Cos } \sigma$, so folgt aus

$$\bar{g}_{ik} d\bar{x}_i d\bar{x}_k = g_{ik} dx_i dx_k$$

wegen (4)

$$(5) \quad \pm k \bar{g}_{ik} (\xi_i \xi_j + \alpha \Delta_{ij}) (\xi_k \xi_l + \alpha \Delta_{kl}) dx_j dx_l = \text{Cos}^4 \sigma g_{ik} dx_i dx_k,$$

also nach (4, 23)

$$(6) \quad \pm k \bar{g}_{ik} (\xi_i \xi_j + \alpha \Delta_{ij}) (\xi_k \xi_l + \alpha \Delta_{kl}) = \text{Cos}^4 \sigma \left(\xi_i \xi_l + \frac{\text{Sin}^2 \sigma}{\sigma^2} \Delta_{il} \right).$$

Nun ist

$$(7) \quad (\xi_i \xi_j + \alpha \Delta_{ij}) (\xi_j \xi_h + \alpha \Delta_{jh}) = \xi_i \xi_h + \Delta_{ih} = \delta_{ih};$$

durch Überschiebung von (6) mit

$$(\xi_j \xi_h + \alpha \Delta_{jh}) (\xi_i \xi_i + \alpha \Delta_{ii})$$

erhalten wir daher

$$(8) \quad \begin{aligned} \pm k \bar{g}_{ht} &= \text{Cos}^4 \sigma \left(\xi_h \xi_t + \alpha^{-1} \frac{\text{Sin}^2 \sigma}{\sigma^2} \Delta_{ht} \right) (\xi_i \xi_i + \alpha \Delta_{ii}) \\ &= \text{Cos}^4 \sigma \left(\xi_h \xi_t + \alpha^{-2} \frac{\text{Sin}^2 \sigma}{\sigma^2} \Delta_{ht} \right) = \text{Cos}^4 \sigma \left(\xi_h \xi_t + \frac{1}{\text{Cos}^2 \sigma} \Delta_{ht} \right), \end{aligned}$$

1) O_1 war das Zentrum der RIEMANNschen Normalkoordinaten, und zwar der Kugelpunkt $y_1 = \dots = y_n = 0, y_{n+1} = a$; also hat sein Pol die Koordinaten $y_1 = \dots = y_n = 0, y_{n+1} = -a$.

also

$$(8') \quad \pm k \bar{g}_{ht} = \text{Cos}^2 \sigma (\Delta_{ht} + \text{Cos}^2 \sigma \xi_h \xi_t).$$

Um die Komponenten \bar{g}_{ht} in den Koordinaten $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ auszudrücken, berechnen wir

$$(9) \quad \bar{s}^2 = \bar{x}_i \bar{x}_i = \text{Tan}^2 \sigma, \quad \bar{s} = \text{Tan} \sigma.$$

Daraus folgt

$$\pm \bar{s}^2 \text{Cos}^2 \sigma = \pm \text{Sin}^2 \sigma = 1 - \text{Cos}^2 \sigma,$$

also

$$(9') \quad \text{Cos}^2 \sigma = \frac{1}{1 \pm \bar{s}^2}, \quad 1 - \text{Cos}^2 \sigma = \pm \frac{\bar{s}^2}{1 \pm \bar{s}^2}.$$

Ferner ist

$$(9'') \quad \bar{\xi}_i = \frac{\bar{x}_i}{\bar{s}} = \frac{x_i}{s} = \xi_i.$$

Unter Benutzung von (9) erhalten wir also

$$(10) \quad \pm k \bar{g}_{ht} = \frac{1}{1 \pm \bar{s}^2} \left(\delta_{ht} \mp \frac{\bar{x}_h \bar{x}_t}{1 \pm \bar{s}^2} \right).$$

Ist $k < 0$, so ist $\text{Tan} \sigma \leq 1$, also $\bar{s} \leq 1$. Daher bedeutet $1 - \bar{s}^2$ im Nenner von (10) keinerlei Einschränkung für den Geltungsbereich der Koordinaten $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Deuten wir aber die $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ als die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten eines auf diese Art definierten Bildes unseres R_n konstanter negativer Krümmung, so besteht dieses aus den inneren Punkten der euklidischen Einheitskugel $\bar{x}_i \bar{x}_i = 1$. Darüber mehr im folgenden Paragraphen!

Wir wollen nun zeigen, daß in den Räumen konstanter Krümmung *Bewegungsgruppen* existieren. Wir bleiben bei den eben eingeführten projektiven Koordinaten und lassen die zur Unterscheidung von den Normalkoordinaten gesetzten Querstriche wieder weg. Im Fall $k > 0$ kommt man ohne Schwierigkeit zu der gesuchten Bewegungsgruppe, wenn man die euklidischen Drehungen der Kugel $y_1^2 + \dots + y_{n+1}^2 = a^2$ eines euklidischen R_{n+1} um ihren Mittelpunkt in den Koordinaten auf der Kugel ausdrückt. Für diese Drehungen gilt

$$\bar{y}_i = a_{j_l} y_l \quad (j, l = 1, \dots, n+1)$$

mit orthogonaler Matrix $\|a_{j_l}\|$. Nach (4, 18') folgt daraus für Normalkoordinaten z_i auf der Kugel (im folgenden laufen i, j, l usw. und die Summationen, wenn nicht anders angegeben, stets von 1 bis n)

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}_j}{\bar{s}} \sin \frac{\bar{s}}{a} &= a_{j_l} \frac{z_l}{s} \sin \frac{s}{a} + a_{j_{n+1}} \cos \frac{s}{a}, \\ \cos \frac{\bar{s}}{a} &= a_{n+1_l} \frac{z_l}{s} \sin \frac{s}{a} + a_{n+1_{n+1}} \cos \frac{s}{a}, \end{aligned}$$

was, in den projektiven Koordinaten (1) ausgedrückt¹⁾, auf die Transformation

$$(11) \quad \bar{x}_i = \frac{a_{ik} x_k + a_{i, n+1}}{a_{n+1k} x_k + a_{n+1, n+1}}$$

führt. Wir behaupten nun, daß die Transformationen (11) die Bewegungsgruppe des R_n bilden, wenn im Fall $k > 0$ die Matrix $\|a_{ik}\|$, im Fall $k < 0$ die Matrix

$$(11') \quad \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & -i a_{1, n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & -i a_{n, n+1} \\ i a_{n+11} & \dots & i a_{n+1n} & a_{n+1, n+1} \end{array} \right\|$$

orthogonal ist ($i = \sqrt{-1}$). Für $k < 0$ gilt demnach

$$(12) \quad \begin{cases} a_{ik} a_{il} - a_{n+1k} a_{n+1l} = \delta_{kl} & (\text{auch für } k = n+1 \text{ oder } l = n+1) \\ a_{i, n+1} a_{i, n+1} - a_{n+1, n+1}^2 = -1 & (i = l = n+1). \end{cases}$$

Wir geben zunächst für $k < 0$ den Nachweis, daß die Transformationen (11) überhaupt eine Gruppe bilden (für $k > 0$ geht das aus der obigen Herleitung hervor). Die Matrix (11'), die aus $\|a_{ik}\|$ durch Multiplikation der letzten Zeile mit i und der letzten Spalte mit $-i$ entsteht, bezeichnen wir mit $\|a_{ik}^0\|$. Ist dann

$$(13) \quad \bar{\bar{x}}_j = \frac{b_{ji} \bar{x}_i + b_{j, n+1}}{b_{n+1i} \bar{x}_i + b_{n+1, n+1}}$$

eine zweite Transformation mit der Eigenschaft (12), so folgt aus (11) und (13)

$$(14) \quad \bar{\bar{x}}_j = \frac{b_{ji}(a_{ik} x_k + a_{i, n+1}) + b_{j, n+1}(a_{n+1k} x_k + a_{n+1, n+1})}{b_{n+1i}(a_{ik} x_k + a_{i, n+1}) + b_{n+1, n+1}(a_{n+1k} x_k + a_{n+1, n+1})}.$$

Diese Transformation hat die Form

$$\bar{\bar{x}}_j = \frac{c_{jk} x_k + c_{j, n+1}}{c_{n+1k} x_k + c_{n+1, n+1}},$$

wo

$$(15) \quad c_{jk} = b_{ji} a_{ik} \quad (i, j, k = 1, \dots, n+1)$$

ist. Sind c_{jk}^0 und b_{jr}^0 die Matrizen, die aus c_{jk} und b_{jr} so gebildet sind wie (11') aus a_{ik} , so folgt aus (15)

$$c_{jk}^0 = b_{jr}^0 a_{rk}^0 \quad (j, k, r = 1, \dots, n+1),$$

und da a_{ik}^0 und b_{jk}^0 orthogonale Matrizen sind, gilt dasselbe für c_{ik}^0 , d. h. die c_{ik} genügen den Gleichungen (12).

1) In (1) bedeuten die x_i Normalkoordinaten, die wir jetzt mit z_i bzw. \bar{z}_i bezeichnen, während die \bar{x}_i in (1) projektive Koordinaten sind, die jetzt x_i bzw. \bar{x}_i heißen. Die Transformation (11) wird dabei als *Punkttransformation* im R_n aufgefaßt (x_i und \bar{x}_i sind die Koordinaten zweier „entsprechender“ Punkte in bezug auf ein festes Koordinatensystem).

Wir bringen nun weiter den Nachweis, daß durch jede Transformation dieser Gruppe ein geometrisches Gebilde in ein kongruentes übergeführt wird, was wir eben durch den Namen „Bewegungsgruppe“ kennzeichnen wollten. Wir führen den Nachweis für die beiden Fälle $k > 0$ und $k < 0$ gemeinsam und setzen zur Abkürzung

$$(16) \quad N = a_{n+1k} x_k + a_{n+1n+1}.$$

Aus (11) folgt

$$\begin{aligned} \bar{s}^2 &= \bar{x}_i \bar{x}_i = \frac{1}{N^2} (a_{ik} x_k + a_{in+1}) (a_{il} x_l + a_{in+1}) \\ &= \frac{1}{N^2} (a_{ik} a_{il} x_k x_l + 2a_{ik} a_{in+1} x_k + a_{in+1} a_{in+1}) \\ &= \frac{1}{N^2} [(\delta_{kl} \mp a_{n+1k} a_{n+1l}) x_k x_l + 2(\mp a_{n+1k} a_{n+1n+1}) x_k \pm 1 \mp a_{n+1n+1}^2] \\ &= \frac{1}{N^2} (x_k x_k \pm 1) \mp \frac{1}{N^2} (a_{n+1k} x_k + a_{n+1n+1})^2 = \frac{1}{N^2} (s^2 \pm 1) \mp 1, \end{aligned}$$

also ist

$$(17) \quad \bar{s}^2 \pm 1 = \frac{1}{N^2} (s^2 \pm 1).$$

Bemerkt sei, daß im Fall $k < 0$ die Hyperfläche $s = 1$ nach (17) durch eine Transformation (11) in sich übergeführt wird (im Fall $k > 0$ gilt dasselbe für die imaginäre Hyperfläche $s = \sqrt{-1}$). Die Punkte dieser Hyperfläche, die nach (10) nicht mehr dem Bereich der projektiven Koordinaten angehören, sind die *unendlich fernen* oder *uneigentlichen* Punkte des Raumes konstanter negativer Krümmung, worauf wir noch zurückkommen. Weiter folgt aus (11)

$$(18) \quad d\bar{x}_i = \frac{1}{N^2} [N a_{ik} d x_k + (a_{ik} x_k + a_{in+1}) M],$$

wo zur Abkürzung

$$(18') \quad M = -a_{n+1k} d x_k$$

gesetzt ist, und daraus

$$\begin{aligned} (19) \quad N^4 d\bar{x}_i d\bar{x}_i &= N^2 a_{ik} a_{il} d x_k d x_l + 2MN (a_{il} a_{in+1} x_l d x_k + a_{in+1} a_{in+1} d x_k) \\ &\quad + M^2 (a_{il} a_{in+1} x_l x_k + 2a_{in+1} a_{in+1} x_k + a_{in+1} a_{in+1}) \\ &= N^2 (\delta_{kl} \mp a_{n+1k} a_{n+1l}) d x_k d x_l + 2MN [(\delta_{lk} \mp a_{n+1l} a_{n+1k}) x_l d x_k \\ &\quad \mp a_{n+1k} a_{n+1n+1} d x_k] + M^2 [(s^2 \pm 1) \mp N^2] \\ &= N^2 d x_i d x_i + 2MN x_i d x_i + M^2 (s^2 \pm 1), \end{aligned}$$

also

$$(20) \quad d\bar{x}_i d\bar{x}_i = \frac{1}{N^4} [N^2 d x_i d x_i + 2MN x_i d x_i + M^2 (s^2 \pm 1)].$$

Durch Differentiation von (17) ergibt sich

$$(21) \quad \bar{x}_i d\bar{x}_i = \frac{1}{N^2} x_i d x_i + (s^2 \pm 1) \frac{M}{N^2}.$$

Nach (17), (20) und (21) ist

$$\begin{aligned}
 \pm k g_{ik}(\bar{x}) d\bar{x}_i d\bar{x}_k &= \frac{1}{1 \pm s^2} \left(\delta_{ik} \mp \frac{\bar{x}_i \bar{x}_k}{1 \pm s^2} \right) d\bar{x}_i d\bar{x}_k \\
 &= \frac{N^2}{1 \pm s^2} \left[\frac{1}{N^4} (N^2 dx_i dx_i + 2MN x_i dx_i + M^2 (s^2 \pm 1)) \right. \\
 (22) \quad &\quad \left. \mp \frac{N^2}{1 \pm s^2} \left(\frac{(x_i dx_i)^2}{N^4} + 2(s^2 \pm 1) x_i dx_i \frac{M}{N^5} + (s^2 \pm 1)^2 \frac{M^2}{N^6} \right) \right] \\
 &= \frac{N^2}{1 \pm s^2} \left[\frac{dx_i dx_i}{N^2} \mp \frac{(x_i dx_i)^2}{N^2(1 \pm s^2)} \right] = \frac{1}{1 \pm s^2} \left(\delta_{ik} \mp \frac{x_i x_k}{1 \pm s^2} \right) dx_i dx_k,
 \end{aligned}$$

also

$$(23) \quad g_{ik}(x) d\bar{x}_i d\bar{x}_k = g_{ik}(x) dx_i dx_k,$$

womit der Nachweis, daß (11), (12) eine Bewegungsgruppe ist, geliefert ist.

Aus der Form (11), (12) der Bewegungsgruppe folgt ohne Rechnung das (bereits bekannte) Resultat, daß die Hyperflächen $A_i x_i = \text{konst. Ebenen sind}$. Betrachten wir nämlich neben der Matrix a_{ik} ($i, k = 1, \dots, n+1$) eine zweite, die wir mit b_{ik} bezeichnen und die aus der ersten durch Vertauschung der ersten und zweiten Zeile entsteht, so daß

$$(24) \quad \begin{cases} a_{ik} = b_{ik} & (i=3, \dots, n+1; k=1, \dots, n+1) \\ a_{1k} = b_{2k}, \quad a_{2k} = b_{1k} & (k=1, \dots, n+1) \end{cases}$$

ist. Der Matrix b_{ik} entspricht dann wieder eine Transformation der Bewegungsgruppe

$$(25) \quad \tilde{x}_i = \frac{b_{ik} x_k + b_{i, n+1}}{b_{n+1, k} x_k + b_{n+1, n+1}}.$$

Durch Elimination der x_1, \dots, x_n aus (11) und (25) ergibt sich infolge der Gruppeneigenschaft zwischen den \bar{x}_i und den \tilde{x}_i eine Transformation der Bewegungsgruppe. Die Punkte, die bei dieser Transformation in sich transformiert werden, für die also $\bar{x}_i = \tilde{x}_i$ ($i = 1, \dots, n$) gilt (die „Inzidenzmenge“ dieser Transformation), entsprechen der durch

$$(26) \quad \frac{a_{ik} x_k + a_{i, n+1}}{a_{n+1, k} x_k + a_{n+1, n+1}} = \frac{b_{ik} x_k + b_{i, n+1}}{b_{n+1, k} x_k + b_{n+1, n+1}} \quad (i, k=1, \dots, n)$$

oder

$$(27) \quad (a_{2k} - a_{1k}) x_k = -a_{2, n+1} + a_{1, n+1}$$

definierten Urbildmenge, die also eine F_{n-1} ist; dasselbe gilt von ihrem „Bilde“, der Inzidenzmenge $\bar{x} = \tilde{x}_i$. Die Inzidenzmenge (wir können jetzt von ihr als $n - 1$ dimensionaler Mannigfaltigkeit sprechen) ist eine Ebene, da sie ja jede Geodätische ganz enthalten muß, mit der sie ein Element „Punkt plus Richtung“ (kontravarianter Vektor) gemeinsam hat; andernfalls ergäbe die „Bewegung“ $\bar{x}_i \rightarrow \tilde{x}_i$ eine zweite, von ihr verschiedene Geodätische, die

mit ihr dieses Element gemeinsam hätte. Also ist auch die durch (27) dargestellte Mannigfaltigkeit eine Ebene E_{n-1} . Da man aber jede „lineare“ $F_{n-1} : A_i x_i = \text{konst.}$ in der Form (27) anschreiben kann,¹⁾ so ist jede solche F_{n-1} eine E_{n-1} , w. z. b. w.

Wir wollen noch kurz überlegen, daß es neben (11) keine weiteren Transformationen der Bewegungsgruppe gibt, womit der Name Bewegungsgruppe für die Gruppe (11) erst vollends gerechtfertigt ist, da ja (11) bloß eine Untergruppe der Bewegungsgruppe sein könnte. Nun folgt dies aus der Tatsache, daß es stets eine Transformation T in (11) gibt, die einen Punkt P und ein normiertes n -Bein $(\alpha)\lambda^i$ in P in einen Punkt \bar{P} und in ein normiertes n -Bein $(\alpha)\bar{\lambda}^i$ in \bar{P} transformiert. Wäre dann S eine nicht in (11) auftretende Transformation gleicher Eigenschaft, so ließe ST^{-1} den Punkt P und das normierte n -Bein $(\alpha)\lambda^i$ in P und demnach alle Punkte des R_n fest. Also ist ST^{-1} die identische Transformation und somit $S = T$.

Wie die Räume konstanter positiver Krümmung als Kugeln in euklidischen Räumen einbettbar sind, so sind die Räume konstanter negativer Krümmung in den pseudoeuklidischen Räumen, den Räumen der speziellen Relativitätstheorie einbettbar. Ein pseudoeuklidischer R_{n+1} ist ein $n + 1$ dimensionaler Punktraum, dessen Maßform in geeigneten Koordinaten y_1, \dots, y_{n+1} die Gestalt

$$(28) \quad d\sigma^2 = dy_1^2 + \dots + dy_n^2 - dy_{n+1}^2$$

hat. Der pseudoeuklidische R_{n+1} ist kein RIEMANNscher R_{n+1} , da seine Maßform nicht positiv definit ist. Er enthält in der Tat drei Arten von Vektoren. Je nachdem

$$(\lambda^1)^2 + \dots + (\lambda^n)^2 - (\lambda^{n+1})^2 = g_{ik}\lambda^i\lambda^k$$

größer, kleiner oder gleich Null ist, heißt der Vektor $x_1, \dots, x_{n+1}; \lambda^1, \dots, \lambda^{n+1}$ raumartig, zeitartig oder Nullvektor. Eine F_n des R_{n+1} , deren Tangentenraum in jedem Punkte ausschließlich raumartige Vektoren enthält, ist ein RIEMANNscher R_n . Ein Beispiel dafür sind die euklidischen $F_n : y_{n+1} = \text{konst.}$

Als zweites Beispiel sei für negatives k die F_n

$$(29) \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 - y_{n+1}^2 = \frac{1}{k}$$

betrachtet. Vom Koordinatenursprung $y_1 = 0, \dots, y_{n+1} = 0$ projizieren wir die E_n

$$(30) \quad y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n, y_{n+1} = -1$$

1) Man kann eine Matrix a_{ik} der Bewegungsgruppe stets mit Berücksichtigung von $a_{2k} - a_{1k} = \varrho A_k$ bestimmen. Dies läuft geometrisch darauf hinaus, in einem euklidischen (pseudoeuklidischen) R_{n+1} mit der Maßform $dx_1^2 + \dots + dx_n^2 \pm dx_{n+1}^2$ zwei Einheitsvektoren $-a_{1k}, a_{2k}$ so zu konstruieren, daß der Summenvektor $a_{2k} - a_{1k}$ die gegebene Richtung A_k hat.

auf den Teil der F_n (29), dessen y_{n+1} negativ ist. Ist y_1, \dots, y_{n+1} die Projektion des Punktes (30), so gilt

$$(31) \quad y_i = \varrho x_i \quad (i=1, \dots, n), \quad y_{n+1} = -\varrho,$$

was in (29) eingetragen $\varrho^2(x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1) = \frac{1}{k}$, also

$$(32) \quad \varrho = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \frac{1}{\sqrt{-k}}, \quad s^2 = x_i x_i$$

ergibt (die Wurzeln positiv genommen). Ordnen wir der F_n (29) die x_1, \dots, x_n als Parameter zu, so ist

$$(33) \quad \sqrt{-k} y_i = \frac{x_i}{\sqrt{1-s^2}}, \quad \sqrt{-k} y_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \quad (i=1, \dots, n)$$

ihre Parameterdarstellung. Aus (33) folgt ($s ds = x_i dx_i$)

$$(34) \quad \sqrt{-k} dy_i = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \left(dx_i + \frac{x_i x_k dx_k}{1-s^2} \right), \quad \sqrt{-k} dy_{n+1} = -\frac{x_k dx_k}{(1-s^2)^{3/2}},$$

also wegen (28)

$$(35) \quad -k d\sigma^2 = \frac{1}{1-s^2} \left(dx_i dx_i + 2 \frac{(x_i dx_i)^2}{1-s^2} + \frac{s^2 (x_i dx_i)^2}{(1-s^2)^2} - \frac{(x_i dx_i)^2}{(1-s^2)^2} \right) \\ = \frac{1}{1-s^2} \left(dx_i dx_i + \frac{(x_i dx_i)^2}{1-s^2} \right).$$

Der Vergleich mit (10) ergibt die Identität der F_n (29) mit dem Raum konstanter negativer Krümmung.

§ 6. Die Klein-Cayleysche projektive Darstellung der Räume konstanter negativer Krümmung.

Wir berechnen in unseren projektiven Koordinaten (§ 5) den geodätischen Abstand zweier Punkte $P_0 \left(\overset{0}{x}_i \right)$ und $P_1 \left(\overset{1}{x}_i \right)$. Die Punkte des geodätischen Bogenstückes $\widehat{P_0 P_1}$ sind analytisch durch

$$(1) \quad x_i = \overset{0}{x}_i + \alpha \left(\overset{1}{x}_i - \overset{0}{x}_i \right) \quad (i=1, \dots, n), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

definiert, da im projektiven Koordinatensysteme die Geodätischen durch lineare Gleichungen $x_i = a_i t + b_i$ gegeben sind. Wir setzen zur Abkürzung

$$(2) \quad \Delta x_i = \overset{1}{x}_i - \overset{0}{x}_i, \quad p = \pm \Delta x_i \Delta x_i, \quad q = \pm \overset{0}{x}_i \Delta x_i, \quad r = 1 \pm \overset{0}{x}_i \overset{0}{x}_i.$$

Es gilt dann

$$(2') \quad \begin{cases} x_i = \overset{0}{x}_i + \alpha \Delta x_i, & dx_i = \Delta x_i d\alpha, \\ s^2 = x_i x_i = \overset{0}{x}_i \overset{0}{x}_i + 2 \overset{0}{x}_i \Delta x_i \alpha + \Delta x_i \Delta x_i \alpha^2 = \pm (r-1) \pm 2q\alpha \pm p\alpha^2, \\ dx_i dx_i = \Delta x_i \Delta x_i d\alpha^2 = \pm p d\alpha^2, \\ x_i dx_i = \left(\overset{0}{x}_i \Delta x_i + \alpha \Delta x_i \Delta x_i \right) d\alpha = \pm (q + p\alpha) d\alpha. \end{cases}$$

Das Vorzeichen oben (unten) entspricht dem Fall $k > 0$ ($k < 0$).

Erster Fall: $k > 0$:

Der Maßtensor g_{ik} ist hier durch

$$k g_{ik} = \frac{1}{1+s^2} \left(\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{1+s^2} \right)$$

gegeben. Nun ist nach (2')

$$(2'') \quad 1 + s^2 = p \alpha^2 + 2q\alpha + r.$$

Bezeichnen wir das Bogenelement der Geodätischen (1) mit $d\sigma$, so haben wir

$$(3) \quad k d\sigma^2 = \frac{d\alpha^2}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r} \left(p - \frac{(q + \alpha p)^2}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r} \right) = \frac{d\alpha^2 (pr - q^2)}{(p\alpha^2 + 2q\alpha + r)^2},$$

also

$$(4) \quad \sqrt{k} d\sigma = \frac{d\alpha \sqrt{pr - q^2}}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r}.$$

Da $1 + s^2 = p\alpha^2 + 2q\alpha + r > 0$ ist, so ist $pr > q^2$. Für die Bogenlänge $\overline{P_0 P_1}$ ergibt (4)

$$(4') \quad \sqrt{k} \sigma = \sqrt{pr - q^2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r}.$$

Dieses Integral, das mittels elementarer Methoden auswertbar ist, hat für $pr - q^2 > 0$ den Wert

$$(5) \quad \int_0^1 \frac{d\alpha}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r} = \frac{1}{\sqrt{pr - q^2}} \arctan \frac{pr - q^2}{r + q}.$$

Für den geodätischen Abstand $P_0 P_1$, den wir $\text{arc } P_0 P_1$ schreiben, erhalten wir somit

$$(6) \quad \sqrt{k} \text{arc } P_0 P_1 = \arctan \frac{pr - q^2}{r + q}.$$

Um diesen Ausdruck als Funktion der Koordinaten $\overset{0}{x}_i, \overset{1}{x}_i$ allein zu erhalten, berechnen wir

$$(7) \quad pr - q^2 = \Delta x_i \Delta x_i + \Delta x_i \Delta x_i \overset{0}{x}_k \overset{0}{x}_k - \overset{0}{x}_i \Delta x_i \overset{0}{x}_k \Delta x_k \\ = \Delta x_i \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{ik} (\Delta x_i \overset{0}{x}_k - \Delta x_k \overset{0}{x}_i)^2 = \Delta x_i \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{ik} (\overset{1}{x}_i \overset{0}{x}_k - \overset{1}{x}_k \overset{0}{x}_i)^2,$$

$$(7') \quad r + q = 1 + \overset{0}{x}_i \overset{1}{x}_i.$$

Somit wird

$$(8) \quad \sqrt{k} \text{arc } P_0 P_1 = \arctan \frac{\sum_i (\overset{0}{x}_i - \overset{1}{x}_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{ik} (\overset{1}{x}_i \overset{0}{x}_k - \overset{1}{x}_k \overset{0}{x}_i)^2}{1 + \overset{0}{x}_i \overset{1}{x}_i}.$$

Zweiter Fall: $k < 0$:

Der Maßtensor hat hier die Form

$$-k g_{ik} = \frac{1}{1-s^2} \left(\delta_{ik} + \frac{x_i x_k}{1-s^2} \right).$$

Es gilt

$$(9) \quad 1 - s^2 = p\alpha^2 + 2q\alpha + r,$$

$$-k d\sigma^2 = \frac{d\alpha^2}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r} \left(-p + \frac{(q + \alpha p)^2}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r} \right) = \frac{d\alpha^2}{(p\alpha^2 + 2q\alpha + r)^2} (q^2 - rp),$$

$$(9') \quad \sqrt{-k} d\sigma = \sqrt{q^2 - rp} \frac{d\alpha}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r},$$

$$(10) \quad \sqrt{-k} \operatorname{arc} P_0 P_1 = \sqrt{q^2 - rp} \int_0^1 \frac{d\alpha}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r}.$$

Nun ist für $q^2 - rp > 0$ ((9) verschwindet für $s = \pm 1$!)

$$(10') \quad \int_0^1 \frac{d\alpha}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r} = \frac{1}{2\sqrt{q^2 - rp}} \left(\ln \frac{p+q-\sqrt{q^2-rp}}{p+q+\sqrt{q^2-rp}} - \ln \frac{q-\sqrt{q^2-rp}}{q+\sqrt{q^2-rp}} \right) \\ = \frac{1}{2\sqrt{q^2 - rp}} \ln \frac{q+r+\sqrt{q^2-rp}}{q+r-\sqrt{q^2-rp}},$$

daher wird (10)

$$(11) \quad \sqrt{-k} \operatorname{arc} P_0 P_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{q+r+\sqrt{q^2-rp}}{q+r-\sqrt{q^2-rp}}.$$

Wegen

$$(12) \quad \begin{cases} q^2 - rp = \sum_i (x_i^0 - x_i^1)^2 - \frac{1}{2} \sum_{ik} (x_i^0 x_k^0 - x_k^1 x_i^1) \\ q + r = 1 - x_i^0 x_i^1 \end{cases}$$

können wir statt (11) auch schreiben

$$(13) \quad \sqrt{-k} \operatorname{arc} P_0 P_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - x_i^0 x_i^1 + \sqrt{\sum_i (x_i^0 - x_i^1)^2 - \frac{1}{2} \sum_{ik} (x_i^0 x_k^0 - x_k^1 x_i^1)^2}}{1 - x_i^0 x_i^1 - \sqrt{\sum_i (x_i^0 - x_i^1)^2 - \frac{1}{2} \sum_{ik} (x_i^0 x_k^0 - x_k^1 x_i^1)^2}}.$$

Aus (11) folgt, daß $\operatorname{arc} P_0 P_1$ unendlich wird, wenn im Argument des Logarithmus (11) der Zähler oder der Nenner verschwindet, d. h. wenn

$$q^2 - rp = (q+r)^2$$

oder

$$r(2q+r+p) = 0$$

gilt. $r = 0$ heißt $x_i^0 x_i^1 = 1$. Der zweite Faktor wird

$$2q+r+p = 1 - x_i^0 x_i^1 - \Delta x_i \Delta x_i - 2x_i^0 \Delta x_i = 1 - x_i^1 x_i^1.$$

Der geodätische Abstand zweier Punkte P_0, P_1 des R_n wird demnach nie unendlich, sofern wir nicht den R_n durch die Punkte der $F_{n-1}: x_i x_i = 1$ abschließen. Von den Punkten dieser Hyperfläche hat jeder eigentliche Punkt des R_n unendlich großen Abstand, sie ist also der Ort der unendlich fernen Punkte des R_n . Der Abstand $\text{arc } P_0 P_1$ verschwindet, wenn das Argument des Logarithmus gleich eins ist, d. h. wenn

$$0 = q^2 - rp = \Delta x_i \Delta x_i - \Delta x_i \Delta x_i \overset{0}{x}_i \overset{0}{x}_i + \left(\overset{0}{x}_i \Delta x_i \right)^2.$$

Nun ist $\overset{0}{x}_i \overset{0}{x}_i < 1$ in jedem eigentlichen Punkt des R_n , also ist die obige Relation nur für $\Delta x_i = 0$ zu befriedigen, d. h. für $\overset{1}{x}_i = \overset{0}{x}_i$. Dieses ohnehin evidente Ergebnis haben wir nur der Vollständigkeit wegen hingeschrieben.

Nun finden wir bei Benutzung der Formel (11) Anschluß an FELIX KLEINS Darstellung der Räume konstanter negativer Krümmung.

Wir denken uns den euklidischen R_n auf rechtwinklige kartesische Koordinaten x_i bezogen und betrachten die Punktmenge

$$(14) \quad x_i x_i < 1,$$

deren Berandung die Kugel

$$(14') \quad s^2 = x_i x_i = 1$$

bildet. Sind $P_0(\overset{0}{x}_i)$ und $P_1(\overset{1}{x}_i)$ zwei Punkte der Menge (14), so verbinden wir sie durch die euklidische Gerade

$$(14'') \quad x_i = \overset{0}{x}_i + \Delta x_i t.$$

Für die auf der Berandung (14') gelegenen beiden Punkte dieser Geraden gilt

$$x_i x_i = 1 = \overset{0}{x}_i \overset{0}{x}_i + 2 \overset{0}{x}_i \Delta x_i t + \Delta x_i \Delta x_i t^2,$$

also

$$(15) \quad p t^2 + 2 q t + r = 0.$$

Bezeichnen wir diese Berandungspunkte mit M, N , so gilt für deren Parameterwerte

$$(16) \quad t_M = \frac{-q - \sqrt{q^2 - rp}}{p}, \quad t_N = \frac{-q + \sqrt{q^2 - rp}}{p}.$$

Für das euklidisch gemessene Doppelverhältnis der vier Punkte P_0, P_1, M und N , das wir in der üblichen Weise mit $(P_0 P_1 M N)$ bezeichnen, ergibt dies

$$(17) \quad (P_0 P_1 M N) = \frac{q + \sqrt{q^2 - rp}}{q - \sqrt{q^2 - rp}} \cdot \frac{p + q - \sqrt{q^2 - rp}}{p + q + \sqrt{q^2 - rp}}$$

oder wegen (10') und (11)

$$(18) \quad \sqrt{-k} \text{ arc } P_0 P_1 = \frac{1}{2} \ln (P_0 P_1 M N).$$

Diese Abstandsdefinition für die Punkte der Menge (14) ist der Ausgangspunkt der projektiven Darstellung KLEINS für die Räume konstanter negativer Krümmung. Infolge des projektiven Charakters der rechten Seite von (18) kann man natürlich zur Konstruktion dieser Räume statt der Punktmenge (14) jede ihr „projektiv kongruente“ verwenden.¹⁾

Für den ersten Fall $k > 0$ kommt man durch analoge Rechnung zu einer imaginären Fundamentalfäche.

§ 7. Konforme Abbildung der Räume konstanter Krümmung auf den euklidischen R_n .

Wir üben auf die RIEMANNschen Normalkoordinaten x_i (§ 4) die Transformation

$$(1) \quad \bar{x}_i = 2 \frac{x_i}{\sigma} \operatorname{Cot} \frac{\sigma}{2}, \quad \sigma = s \sqrt{\pm k}$$

aus und berechnen in den Koordinaten \bar{x}_i den Maßtensor. Aus (1) folgt

$$(2) \quad \sqrt{\pm k} d\bar{x}_i = 2 \frac{\Delta_{ij}}{s} dx_j \operatorname{Cot} \frac{\sigma}{2} - \frac{\xi_i \xi_j dx_j}{\operatorname{Sin}^2 \frac{\sigma}{2}} \sqrt{\pm k},$$

also

$$(3) \quad d\bar{x}_i = - \frac{dx_j}{\operatorname{Sin}^2 \frac{\sigma}{2}} [\xi_i \xi_j + \alpha \Delta_{ij}],$$

wo

$$(4) \quad \alpha = -2 \operatorname{Sin} \frac{\sigma}{2} \operatorname{Cos} \frac{\sigma}{2} \frac{1}{s \sqrt{\pm k}} = - \frac{\operatorname{Sin} \sigma}{\sigma}$$

ist. Nun ist nach (4, 23)

$$(5) \quad \bar{g}_{ik} d\bar{x}_i d\bar{x}_k = g_{ik} dx_i dx_k = \left[\xi_i \xi_k + \frac{\operatorname{Sin}^2 \sigma}{\sigma^2} (\delta_{ik} - \xi_i \xi_k) \right] dx_i dx_k$$

1) Sei $P(x_i)$ ein Punkt der Menge $x_i x_i < 1$. Wir betrachten den (jedenfalls nicht reellen) die Kugel $x_i x_i = 1$ berührenden Kegel mit der Spitze P . Ist λ^i ein Vektor dieses Kegels, so hat

$$(x_i + \lambda^i t)(x_i + \lambda^i t) = x_i x_i + 2t x_i \lambda^i + t^2 \lambda^i \lambda^i = 1$$

nach Annahme eine Doppelwurzel t . Also ist $(x_i x_i - 1) \lambda^i \lambda^i - (x_i \lambda^i)^2 = 0$ die Gleichung für die Richtungen λ^i dieses Kegels. Wir können diese Gleichung auch

$$\frac{1}{1 - x_i x_i} \left(\delta_{ik} + \frac{x_i x_k}{1 - x_i x_i} \right) \lambda^i \lambda^k = 0$$

oder nach (5, 10) : $g_{ik} \lambda^i \lambda^k = 0$ schreiben.

Man kann demnach die Kugel $x_i x_i = 1$ ebenso zur *Winkelmessung heranziehen, wie wir sie zur Messung von Längen verwendeten*. Vgl. dazu III, § 2.

und somit wegen (3) und (4)

$$(6) \quad \bar{g}_{ik} \left[\frac{dx_j}{\sin^2 \frac{\sigma}{2}} (\xi_i \xi_j + \alpha \Delta_{ij}) \right] \left[\frac{dx_l}{\sin^2 \frac{\sigma}{2}} (\xi_k \xi_l + \alpha \Delta_{kl}) \right] \\ = \left[\xi_j \xi_l + \frac{\sin^2 \sigma}{\sigma^2} (\delta_{jl} - \xi_j \xi_l) \right] dx_j dx_l,$$

also

$$(7) \quad \bar{g}_{ik} (\xi_i \xi_j + \alpha \Delta_{ij}) (\xi_k \xi_l + \alpha \Delta_{kl}) = \left(\xi_j \xi_l + \frac{\sin^2 \sigma}{\sigma^2} \Delta_{jl} \right) \sin^4 \frac{\sigma}{2}.$$

Durch Überschiebung von (7) mit $(\xi_j \xi_h + \alpha^{-1} \Delta_{jh})(\xi_i \xi_t + \alpha^{-1} \Delta_{it})$ folgt

$$(8) \quad \bar{g}_{ht} = \left(\xi_h \xi_t + \alpha^{-2} \frac{\sin^2 \sigma}{\sigma^2} \Delta_{ht} \right) \sin^4 \frac{\sigma}{2} = (\xi_h \xi_t + \Delta_{ht}) \sin^4 \frac{\sigma}{2}$$

oder

$$(9) \quad \bar{g}_{ht} = \delta_{ht} \sin^4 \frac{\sigma}{2}.$$

Nun ist nach (1), wenn wir $\bar{s}^2 = \bar{x}_i \bar{x}_i$ setzen,

$$(10) \quad \pm k \bar{s}^2 = 4 \cot^2 \frac{\sigma}{2} = 4 \frac{\left(1 \mp \sin^2 \frac{\sigma}{2}\right)}{\sin^2 \frac{\sigma}{2}},$$

woraus

$$(10') \quad \sin^2 \frac{\sigma}{2} = \frac{\pm 4}{4 + k \bar{s}^2}$$

oder wegen (9)

$$(11) \quad \bar{g}_{ik} = \frac{16}{(4 + k \bar{s}^2)^2} \delta_{ik}$$

folgt. Der RIEMANNsche R_n konstanter Krümmung k ist also auf den euklidischen R_n konform abgebildet, wenn wir jenen auf das vorliegende Koordinatensystem und diesen auf rechtwinklige kartesische Koordinaten beziehen und dann Punkte gleicher n -Tupel einander zuordnen. In der Tat folgt ja aus (11) die Gleichheit der entsprechenden Winkel entsprechender Figuren in beiden Räumen.

IX. Die l dimensionalen Hyperflächen des n dimensionalen Raumes konstanter Krümmung.

Das Formenproblem.

§ I. Die invarianten J_k -Räume der F_l .

Die beiden Grundformen einer Fläche des euklidischen R_3 bestimmen diese bis auf Kongruenz und Spiegelung (Band 1, V). Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß dieser Tatbestand ein Spezialfall eines viel allgemeineren ist, daß es für die l dimensionale Hyperfläche des n dimensionalen Raumes konstanter Krümmung ein Formensystem gibt, das diese Hyperfläche bis auf Kongruenz und Spiegelung bestimmt, und zwar für jedes l zwischen 1 und $n - 1$.

Der Klarheit der Darstellung wegen behandeln wir dieses Problem zuerst für den euklidischen R_n ; die Räume konstanter Krümmung sind dann in einigen Worten erledigt.

Wir beziehen den euklidischen R_n auf rechtwinklige kartesische Koordinaten, in welchen der Maßtensor $g_{ik} = \delta_{ik}$ ist. Die F_l setzen wir in Parameterdarstellung

$$(1) \quad x_i = x_i(y_1, \dots, y_l)$$

voraus. Die Funktionen $x_i(y_1, \dots, y_l)$ seien bis zu einer gewissen Ordnung m stetig differenzierbar, jedenfalls so weit, als wir im folgenden davon Gebrauch machen werden. Der Rang der Matrix

$$(2) \quad \left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \right\|$$

ist genau gleich l , da sonst die F_l (1) bereits durch weniger als l Parameter darstellbar, also keine F_l wäre. Singuläre Punkte der F_l , in denen der Rang der Matrix kleiner als l ist, können natürlich auftreten, sie werden aber im folgenden nicht betrachtet.

Der Vektorraum, der durch die Vektoren

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, l)$$

aufgespannt wird, ist demnach in jedem Punkte der F_l l dimensional und heißt *Tangentenraum* des betreffenden Punktes. Wir bezeichnen ihn mit J_1 .

Neben dem Vektorraum J_1 sind die *Schmiegräume* (genauer Schmiege-Vektorräume) von Bedeutung. Mit $J_{12} \dots h$ bezeichnen wir den h ten Schmiegräum, der von allen Ableitungen der x_i nach den y_α bis zur h ten Ordnung einschließlich aufgespannt wird.¹⁾

Es ist also der Vektorraum J_{12} aufgespannt durch die Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}$,
 der Vektorraum J_{123} aufgespannt durch die Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}$,
 $\frac{\partial^3 x_i}{\partial y_\alpha \partial y_\beta \partial y_\gamma}$ usw.

In völliger Analogie zu den Kurven definieren wir weiter die *Normalenräume* in einem Punkte P der F_l , die wir als J_k -Räume ($k = 2, 3, \dots$) bezeichnen; und zwar ist der erste Normalenraum J_2 der größte Untervektorraum des J_{12} , der auf dem J_1 -Raum senkrecht steht, der zweite Normalenraum J_3 ist der größte Untervektorraum des J_{123} , der auf dem J_{12} senkrecht steht usw. Man beachte, daß der $J_{12} \dots h-1$ stets den $J_{12} \dots h-1$ enthält.

Bezeichnen wir mit

$$(3) \quad \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{\alpha_1} \partial y_{\alpha_2} \dots \partial y_{\alpha_h}}$$

die Projektion des Vektors $\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{\alpha_1} \partial y_{\alpha_2} \dots \partial y_{\alpha_h}}$ in den J_h -Raum, so ist

$$\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{\alpha_1} \dots \partial y_{\alpha_h}} - \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{\alpha_1} \dots \partial y_{\alpha_h}}$$

ein Vektor, der auf dem J_h -Raum senkrecht steht (Eigenschaft der Projektion), und da dieser Vektor ganz im $J_{12} \dots h$ -Vektorraum liegt, so muß er ein Vektor des $J_{12} \dots h-1$ sein. Also gilt

$$(4) \quad \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{\alpha_1} \dots \partial y_{\alpha_h}} = \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{\alpha_1} \dots \partial y_{\alpha_h}} + \text{Vektor des } J_{12} \dots h-1.$$

Aus dieser Relation wieder folgt, daß der J_h -Raum gerade durch die Vektoren (3) aufgespannt wird. Solcher Vektoren (3) gibt es höchstens $\binom{l+h-1}{h}$ unabhängige; für die Dimension l_h des J_h -Raumes gilt demnach

$$(5) \quad l_h \leq \binom{l+h-1}{h}.$$

Gilt das Ungleichheitszeichen, so nennen wir den J_h -Raum ausgeartet.

Wir zeigen jetzt, daß die *Schmiegräume* $J_1, J_{12}, J_{123}, \dots$ von der Wahl der Parameter y_1, \dots, y_l nicht abhängen; das gleiche gilt dann für die J_k -Räume. Ist nämlich

1) Im euklidischen, auf kartesische Koordinaten bezogenen R_n sind die Ableitungen von Vektoren stets wieder Vektoren.

$$(6) \quad \bar{y}_p = \bar{y}_p(y_1, \dots, y_l), \quad y_p = y_p(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l)$$

eine Parametertransformation, in welcher die Funktionen $\bar{y}_p(y_1, \dots, y_l)$, $y_p(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l)$ genügend oft ($m > 1$) stetig differenzierbar sind, so folgt aus (6)

$$(7) \quad \frac{\partial \bar{y}_p}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial \bar{y}_t} = \delta_{pt},$$

dennach (I, § 1)

$$(8) \quad \left| \frac{\partial \bar{y}_p}{\partial y_\alpha} \right| \neq 0, \quad \left| \frac{\partial y_p}{\partial \bar{y}_\alpha} \right| \neq 0.$$

Aus

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial y_p} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_\alpha} \frac{\partial \bar{y}_\alpha}{\partial y_p} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_p} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial \bar{y}_p} \end{cases}$$

erkennen wir die Invarianz des Tangentenraumes J_1 bei Parameteränderung und durch fortgesetzte Differentiation des Systems die Invarianz aller Schmiegräume.

§ 2. Ein normiertes, die J_k -Räume aufspannendes Bein und die adjungierten Formen der F_l .

Die J_k -Räume eines Punktes der F_l liegen jedenfalls alle in einem der Schmiegräume $J_{12\dots n}$. Verschwindet der J_r -Raum, d. h. ist

$$J_{12\dots r-1} \equiv J_{12\dots r-1r},$$

so gilt $J_{12\dots r-1} \equiv J_{12\dots r} \equiv J_{12\dots r+1} \equiv \dots$, d. h. es verschwinden dann auch die weiteren Normalenräume J_{r+1}, J_{r+2}, \dots . Es liegen dann alle J_k -Räume im $r-1$ ten Schmiegraum $J_{12\dots r-1}$. Hat dieser Vektorraum die Dimension $\nu \leq n$, so konstruieren wir ein normiertes ν -Bein nach den folgenden zwei Vorschriften: Ist ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ($\alpha = 1, \dots, \nu$) dieses normierte Bein, so soll gelten:

1. Jeder Vektor ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ist in einem der J_k -Räume enthalten.

2. Liegt ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ im J_p (${}_{(\alpha)}\lambda_i \in J_p$) und ${}_{(\beta)}\lambda_i$ im J_q (${}_{(\beta)}\lambda_i \in J_q$), so folgt aus $\alpha < \beta$, daß $p \leq q$ ist.

Kurz gesagt: es spannen die l ersten Vektoren des ν -Beins den J_1 -Raum auf, die l_2 nächsten den J_2 -Raum, die l_3 nächsten den J_3 -Raum usw., wobei l_k die Dimension des J_k -Raumes bedeutet. Je zwei diesen Vorschriften genügende normierte Beine heißen *äquivalent*. Liegt ${}_{(\alpha)}\lambda_i$, d. h. der α te Vektor eines solchen Beines im J_p -Vektorraume, was wir durch

$$\alpha < J_p$$

ausdrücken, so nennen wir α einen Index des J_p -Raumes. Zwei Vektorräume J_p, J_{p+1} heißen *benachbart*, dagegen J_p, J_{p+2} *überbenachbart*.

Es sei jetzt λ_i ein von der Wahl der Parameter y_1, \dots, y_i unabhängiger Vektor eines Punktes P der F_i , z. B.

$$(1) \quad \lambda_i = \frac{d^k x_i}{d s^k},$$

der k te Differentialquotient nach der Bogenlänge einer P enthaltenden Flächenkurve $x_i = x_i(s)$. Die Projektion des Vektors λ_i in jeden der J_h -Räume der F_i in P ist dann ebenfalls von der Parameterwahl unabhängig. Mit

$$(1') \quad \frac{d^k x_i}{d s^k}$$

bezeichnen wir die Projektion des Vektors (1) in den J_k -Raum. Aus der mittels Induktion zu beweisenden Relation

$$\frac{d^k x_i}{d s^k} = \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_k}} \frac{d y_{r_1}}{d s} \dots \frac{d y_{r_k}}{d s} + \sum_{h < k} (\dots) \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_h}}$$

folgt für den Projektionsvektor (1')

$$(2) \quad \frac{d^k x_i}{d s^k} = \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \partial y_{r_2} \dots \partial y_{r_k}} \frac{d y_{r_1}}{d s} \frac{d y_{r_2}}{d s} \dots \frac{d y_{r_k}}{d s}.$$

Mit der linken Seite von (2) ist auch die rechte vom Parametersystem unabhängig und stellt somit für jedes i einen symmetrischen kovarianten Flächentensor (bezüglich der Transformationen der Parameter y_α) k ter Stufe dar mit den Komponenten¹⁾

$$(2') \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_k}}.$$

Ist $(\alpha)\lambda_i$, $\alpha < J_k$, das den J_k -Raum aufspannende normierte l_k -Bein, so gilt die Darstellung

$$(3) \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_k}} = (\alpha)\lambda_i(\alpha) A_{r_1 \dots r_k},$$

1) Ist $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_r}$ in allen Indizes symmetrisch und

$$A = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_r} \varrho^{i_1} \varrho^{i_2} \dots \varrho^{i_r}$$

für beliebige Vektoren x_i , ϱ^i invariant, so ist $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_r}$ ein Tensor im Punkt x_i . Setzen wir nämlich mit willkürlichen Skalaren $\alpha_1, \dots, \alpha_r$

$$\varrho^i = \alpha_1 \sigma_1^i + \alpha_2 \sigma_2^i + \dots + \alpha_r \sigma_r^i,$$

wo x_i, σ^i ($i = 1, \dots, r$) beliebige Vektoren im Punkt x_i sind, so stellt A eine Invariante dar, die eine Form r ten Grades in den willkürlichen Größen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ist. Somit müssen alle Koeffizienten dieser Form selbst Invarianten sein; der Koeffizient von $\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ist aber

$$r! \alpha_{i_1 i_2 \dots i_r} \sigma_1^{i_1} \sigma_2^{i_2} \dots \sigma_r^{i_r}.$$

über $\alpha \prec J_k$ summiert. Setzt man ${}_{(\alpha)}A_{r_1 \dots r_k} = 0$, wenn α kein Index des J_k ist, so gilt (3) für $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Aus (3) folgt dann für die Darstellungskoeffizienten durch Überschiebung mit ${}_{(\beta)}\lambda_i$

$$(4) \quad {}_{(\alpha)}A_{r_1 \dots r_k} = {}_{(\alpha)}\lambda_i \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_k}} \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

Die l_k Formen

$$(5) \quad {}_{(\alpha)}K = {}_{(\alpha)}\lambda_i \frac{d^k x_i}{ds^k} = {}_{(\alpha)}A_{r_1 \dots r_k} \frac{dy_{r_1}}{ds} \dots \frac{dy_{r_k}}{ds} \quad (\alpha \prec J_k),$$

die ebenfalls Invarianten gegenüber Parametertransformationen sind, geben uns l_k symmetrische kovariante Flächentensoren im Punkte P der F_l . Ihre Komponenten

$$(5') \quad {}_{(\alpha)}A_{r_1 \dots r_k} \quad (\alpha \prec J_k)$$

sind linear unabhängig. Aus (3) und (4) folgt ja, daß die Matrizen

$$\left\| \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_k}} \right\| \quad \text{und} \quad \left\| {}_{(\alpha)}A_{r_1 \dots r_k} \right\|$$

den gleichen Rang besitzen, der also gleich l_k sein muß; daher sind die Tensoren (5') linear unabhängig. Die so definierten ν Formen ${}_{(\alpha)}K$ heißen *die dem normierten ν -Bein adjungierten Formen der F_l* .

Sie sind also nicht der F_l selbst zugeordnet, sondern der F_l und einem die J_k -Räume aufspannenden ν -Beine. Den verschiedenen äquivalenten ν -Beinen sind verschiedene solche Formensysteme zugeordnet, die zueinander in höchst einfacher Beziehung stehen und die, wie die entsprechenden ν -Beine, *äquivalente Formensysteme* heißen mögen. Von diesen Formensystemen ${}_{(\alpha)}K$ gelangt man dann, indem man die Summen

$$(6) \quad I_k = \sum_{\alpha \prec J_k} ({}_{(\alpha)}K)^2 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

für jeden J_k bildet, wie wir später zeigen, zu dem der F_l allein zugeordneten System der „Formenquadrate“ (6).

Wir geben nun eine geometrische Interpretation der J_k -Räume und der Formen ${}_{(\alpha)}K$. Ist P ein Punkt der F_l und

$$(7) \quad x_i = x_i(s)$$

irgendeine P enthaltende Kurve C der F_l , so gilt

$$(2) \quad \frac{d^k x_i}{ds^k} = \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_k}} \frac{dy_{r_1}}{ds} \dots \frac{dy_{r_k}}{ds}.$$

Die sämtlichen Projektionen $\frac{d^k x_i}{ds^k}$ liegen (und zwar definitionsgemäß) im

J_k -Räume in P ; wir zeigen zuerst, daß es im J_k keinen Unterraum gibt, der diese Projektionsvektoren bereits enthält.

Gäbe es einen solchen echten (vom J_k verschiedenen) Unterraum des J_k , so sei η_i ein Vektor des J_k normal auf diesen. Der Vektor η_i stünde dann auf allen Vektoren (2) senkrecht, d. h. für jede Richtung $\frac{dy_r}{ds}$ wäre

$$\eta_i \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_k}} \frac{dy_{r_1}}{ds} \dots \frac{dy_{r_k}}{ds} = 0.$$

Der symmetrische Tensor k ter Stufe

$$t_{r_1 \dots r_k} = \eta_i \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_k}}$$

müßte verschwinden, also wäre gegen Annahme η_i normal zum J_k -Raum.

Sei jetzt P ein Punkt der F_i und C eine Kurve $x_i = x_i(s)$ der F_i durch P . Existiert der J_k -Vektorraum in P , so ist nach (2) $\frac{d^k x_i}{ds^k}$ im allgemeinen von Null verschieden.¹⁾ Für die $k - 1$ te Normale $(k)\xi_i$ von C in P gilt nach (IV, 3, 31)

$$(8) \quad \frac{(k)\xi_i}{\varrho_1 \dots \varrho_{k-1}} = \frac{d^k x_i}{ds^k} + \sum_{h < k} X_h \frac{d^h x_i}{ds^h}.$$

Bezeichnen wir mit $(k)\xi_i$ die Projektion von $(k)\xi_i$ in den J_k , so folgt aus (8)

$$(9) \quad \frac{1}{\varrho_1 \dots \varrho_{k-1}} (k)\xi_i = \frac{d^k x_i}{ds^k}.$$

(Die Projektion der Summe ist gleich der Summe der Projektionen.) Das Produkt $\frac{1}{\varrho_1 \dots \varrho_{k-1}}$ ist (als Produkt von Normierungsfaktoren) endlich und im allgemeinen nicht Null; wo es verschwindet, ist $\frac{d^k x_i}{ds^k} = 0$. Die Vektorräume

$$\left\{ (k)\xi_i \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{d^k x_i}{ds^k} \right\},$$

für alle Kurven der F_i durch P gebildet, sind nach (9) identisch. Also ist der J_k der kleinste Vektorraum, der alle $(k)\xi_i$ (aller Kurven der F_i in P) enthält.

Es ist somit der J_1 der kleinste Vektorraum in P , der die Tangenten aller Flächenkurven in P enthält, der J_{12} der kleinste Vektorraum in P , der die Tangenten und ersten Normalen aller dieser Kurven in P enthält, usw.²⁾

1) Nur für gewisse Ausnahmerichtungen spezieller F_i kann $\frac{d^k x_i}{ds^k} = 0$ sein.

2) Ohne Einschränkung gilt, daß der $J_{12} \dots k$ -Raum durch die Vektoren $(1)\xi_i, (2)\xi_i, \dots, (k)\xi_i$ aller Kurven durch P aufgespannt wird.

Sei jetzt ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ein Vektor des die J_k -Räume aufspannenden ν -Beines, so folgt aus (8) für $\alpha \prec J_k$

$${}_{(\alpha)}\lambda_i {}_{(k)}\xi_i = \varrho_1 \cdots \varrho_{k-1} {}_{(\alpha)}\lambda_i \frac{d^k x_i}{ds^k} = \varrho_1 \cdots \varrho_{k-1} {}_{(\alpha)}K,$$

oder

$$(10) \quad {}_{(\alpha)}K = \frac{{}_{(\alpha)}\lambda_i {}_{(k)}\xi_i}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{k-1}} \quad (\alpha \prec J_k).$$

Diese Darstellung, beziehungsweise die tensorielle

$$(10') \quad {}_{(\alpha)}K = \frac{{}_{(\alpha)}\lambda_i {}_{(k)}\xi_i}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{k-1}} \quad (\alpha \prec J_k)$$

der Formen unserer F_l bleibt auch dann richtig, wenn wir den euklidischen R_n auf beliebige (zulässige) Koordinaten beziehen.

Für $l=1$, also im Falle der Kurven ist der J_k -Raum eindimensional und ${}_{(k)}\lambda_i = {}_{(k)}\xi_i$. Aus (10) folgt

$$(11) \quad {}_{(k)}K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{k-1}},$$

der höchst einfache Zusammenhang der hier verwendeten Formen mit den Krümmungen der Kurve.

§ 3. Die Ableitungsgleichungen.

Sie entsprechen im Falle der Kurven (Flächen) den FRENETSchen (bzw. WEINGARTENSchen und GAUSSSchen) Formeln der elementaren Differentialgeometrie.

Ist ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ($\alpha = 1, \dots, \nu$) ein die J_k -Räume aufspannendes ν -Bein, so sind die Ableitungen $\frac{\partial {}_{(\alpha)}\lambda_i}{\partial y_p}$ Vektoren, die durch das ν -Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ($\alpha = 1, \dots, \nu$) selbst linear darstellbar sind:

$$(1) \quad \frac{\partial {}_{(\alpha)}\lambda_i}{\partial y_p} = {}_{(\alpha\beta)}C_p {}_{(\beta)}\lambda_i, \quad {}_{(\alpha\beta)}C_p = \frac{\partial {}_{(\alpha)}\lambda_i}{\partial y_p} {}_{(\beta)}\lambda_i \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, \nu).$$

Man bestätigt das bei einigem Überlegen, im übrigen folgt es auch aus den Ausführungen dieses Paragraphen. Da $d {}_{(\alpha)}\lambda_i = {}_{(\alpha\beta)}C_p d y_p {}_{(\beta)}\lambda_i$ von der Wahl der Parameter y_1, \dots, y_l nicht abhängt, so ist ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ für jede der Kombinationen α, β ein kovarianter Vektor in bezug auf Parametertransformationen.

Wir stellen uns die Aufgabe, diese Vektoren durch die im vorhergehenden Paragraphen definierten symmetrischen Tensoren (2, 4)

$$(2) \quad ({}_{\alpha})A_p, \quad ({}_{\alpha})A_{p_1 p_2}, \quad ({}_{\alpha})A_{p_1 p_2 p_3}, \dots$$

zu berechnen. Es gilt hier das fundamentale Resultat, daß diese Berechnung, die allerdings sehr umständlich ist, *in eindeutiger Weise* zum Ziele führt.

Außer den aus (1) zu entnehmenden Integrabilitätsbedingungen sind bei der Berechnung noch gewisse Relationen zwischen den $(\alpha\beta)C_p$ herzuleiten, die aus der Art der Konstruktion des die J_k -Räume aufspannenden normierten ν -Beins gefolgert werden.

Aus der Normierungsvorschrift $(\alpha)\lambda_i(\beta)\lambda_i = \delta_{\alpha\beta}$ erhalten wir durch Differentiation nach y_p wegen (1)

$$0 = \frac{\partial(\alpha)\lambda_i}{\partial y_p}(\beta)\lambda_i + (\alpha)\lambda_i \frac{\partial(\beta)\lambda_i}{\partial y_p} = (\alpha\gamma)C_p(\gamma)\lambda_i(\beta)\lambda_i + (\beta\gamma)C_p(\gamma)\lambda_i(\alpha)\lambda_i,$$

also

$$(3) \quad (\alpha\beta)C_p = -(\beta\alpha)C_p.$$

Während (3) für jedes in den Punkten der F_i definierte normierte ν -Bein gilt, kommt die jetzt abzuleitende Relation nur den in § 2 definierten (die J_k -Räume aufspannenden) ν -Beinen zu. Ist $(\alpha)\lambda_i$ ein solches ν -Bein und ist α ein Index des J_k , also $(\alpha)\lambda_i \prec J_k$, so ist $(\alpha)\lambda_i$ nach Konstruktion als Vektor des $J_{12\dots k}$ durch die Ableitungen der x_1, \dots, x_n nach den y_1, \dots, y_i bis zur k ten Ordnung einschließlich (letztere wirklich vertreten) linear darstellbar, $\frac{\partial(\alpha)\lambda_i}{\partial y_p}$ somit durch die Ableitungen bis zur $k+1$ ten Ordnung, wobei letztere in die Darstellung wirklich eintreten. Also ist $\frac{\partial(\alpha)\lambda_i}{\partial y_p}$ ein Vektor des $J_{12\dots k+1}$. Ist dann $(\beta)\lambda_i$ ein zweiter Vektor des die J_k -Räume aufspannenden ν -Beins und $\beta \prec J_{k+r}$, $r > 1$, so ist, da der J_{k+r} auf dem $J_{12\dots k+r-1} \succ J_{12\dots k+1}$ normal steht,

$$\frac{\partial(\alpha)\lambda_i}{\partial y_p}(\beta)\lambda_i = 0$$

d. h. es gilt

$$(4) \quad (\alpha\beta)C_p = 0 \quad (\alpha \prec J_k, \beta \prec J_{k+r}, r > 1).$$

Daraus und wegen (3) folgt allgemeiner

$$(5) \quad (\alpha\beta)C_p = 0 \quad (\alpha \prec J_k, \beta \prec J_{k\pm r}, r > 1).$$

Dies drücken wir in dem Satze aus: *Nur für Indizes α, β gleicher oder benachbarter (§ 2) J_k -Räume sind die $(\alpha\beta)C_p$ von Null verschieden.*

Neben den Relationen (3) und (5) leiten wir jetzt eine Relation ab, die die Tensoren (2) mit den $(\alpha\beta)C_p$ verknüpft. Durch Differentiation von (2, 3) nach $y_{r_{k+1}}$ erhalten wir

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial y_{r_{k+1}}} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_k}} \right) = \left[\frac{\partial(\alpha)A_{r_1 \dots r_k}}{\partial y_{r_{k+1}}} + (\gamma\alpha)C_{r_{k+1}}(\gamma)A_{r_1 \dots r_k} \right] (\alpha)\lambda_i,$$

in welcher Relation die Koeffizienten von $(\alpha)\lambda_i$ rechter Hand identisch verschwinden, wenn α nicht ein Index des J_{k-1} , J_k oder J_{k+1} ist. Das folgt aus

$(\alpha)A_{r_1 \dots r_k} = 0$ für $\alpha < J_h$, $h \neq k$ und dann weiter aus (5). Aus (1, 4) für $h = k$ erhalten wir durch Differentiation nach $y_{r_{k+1}}$

$$(7) \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{r_1} \partial y_{r_2} \dots \partial y_{r_k} \partial y_{r_{k+1}}} = \frac{\partial}{\partial y_{r_{k+1}}} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \partial y_{r_2} \dots \partial y_{r_k}} \right) + \text{Vektor des } J_{12 \dots k}.$$

Die Projektion des Vektors auf der linken Seite der Relation (6) in den J_{k+1} -Raum ist nach (6) durch $(\gamma\alpha)C_{r_{k+1}(\gamma)}A_{r_1 \dots r_k} \lambda_i$ ($\alpha < J_{k+1}$) und nach (7) durch

$$\frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{r_1} \dots \partial y_{r_k} \partial y_{r_{k+1}}} = (\alpha)A_{r_1 \dots r_k r_{k+1}} (\alpha) \lambda_i \quad (\alpha < J_{k+1})$$

gegeben. Der Vergleich ergibt wegen der linearen Unabhängigkeit der $(\alpha) \lambda_i$

$$(8) \quad (\alpha)A_{r_1 \dots r_k r_{k+1}} = (\gamma\alpha)C_{r_{k+1}(\gamma)}A_{r_1 \dots r_k} \quad (\alpha < J_{k+1}),$$

in welcher Relation γ die Indizes des J_k durchläuft.

§ 4. Berechnung der $(\alpha\beta)C_p$.

Nur für Indizes α, β desselben oder benachbarter J_k -Räume sind die $(\alpha\beta)C_p$ von Null verschieden. Die $(\alpha\beta)C_p$, für die α und β benachbarten J_k angehören, berechnen wir aus dem zuletzt abgeleiteten Relationensystem (3, 8). Da die l_k Formen $(\gamma)A_{r_1 \dots r_k}$ ($\gamma < J_k$) linear unabhängig sind, so hat die Matrix

$$\| (\gamma)A_{r_1 \dots r_k} \|$$

den Rang l_k , sie enthält also eine nicht verschwindende Determinante von der Ordnung l_k . Somit genügt das Teilsystem von (3, 8), in das die Elemente $(\gamma)A_{r_1 \dots r_k}$ dieser Determinante eintreten, zur eindeutigen Berechnung der $(\alpha\beta)C_p$ ($\alpha < J_k$, $\beta < J_{k+1}$).

Die restlichen Gleichungen (3, 8), die nach Substitution der berechneten $(\alpha\beta)C_p$ für die gegebene F_i erfüllt sind, stellen für ein gegebenes Formensystem Bedingungsgleichungen dar, wenn eine F_i mit diesem Formensystem existieren soll. Wir wollen diesen Bedingungsgleichungen einen Namen geben, und zwar mögen sie, da sie nur die Tensoren (3, 2) und nicht deren Ableitungen enthalten, *die algebraischen Bedingungsgleichungen* des gegebenen Formensystems heißen. Ist der J_k -Raum nicht ausgeartet, dann (und nur dann) benötigt man zur Berechnung der $(\alpha\beta)C_p$ das ganze System (3, 8), und die entsprechenden algebraischen Bedingungsgleichungen fallen weg.

Wir notieren das bisher gewonnene Ergebnis: *Die $(\alpha\beta)C_p$ sind für $\alpha < J_k$, $\beta < J_{k+1}$ aus den Tensoren $(\gamma)A_{r_1 \dots r_k}$, $\gamma < J_k$, J_{k+1} eindeutig berechenbar.*

Es verbleibt uns die bei weitem kompliziertere Berechnung der $(\alpha\beta)C_p$ für $\alpha, \beta < J_k$. Wir berechnen sie unter Benutzung der Integrabilitätsbedingungen des Systemes

$$(I) \quad \begin{cases} (a) & d_{(\alpha)\lambda_i} = (\alpha\beta)C_p (\beta)\lambda_i dy_p \\ (b) & dx_i = (\alpha)A_p (\alpha)\lambda_i dy_p. \end{cases}$$

Wir beginnen mit den aus (I b) folgenden Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} - \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_p} = 0,$$

die ausführlich geschrieben

$$(1) \quad (\alpha)\lambda_i \left(\frac{\partial_{(\alpha)A_p}}{\partial y_q} - \frac{\partial_{(\alpha)A_q}}{\partial y_p} + (\beta)A_p (\beta\alpha)C_q - (\beta)A_q (\beta\alpha)C_p \right) = 0$$

lauten, woraus (immer wegen der linearen Unabhängigkeit der $(\alpha)\lambda_i$)

$$(2) \quad \frac{\partial_{(\alpha)A_p}}{\partial y_q} - \frac{\partial_{(\alpha)A_q}}{\partial y_p} = (\beta)A_q (\beta\alpha)C_p - (\beta)A_p (\beta\alpha)C_q$$

folgt. Das System (2) ist identisch befriedigt, wenn $\alpha < J_h$, $h > 2$ ist. Für $\alpha < J_2$ lautet es

$$(3) \quad (\beta)A_p (\beta\alpha)C_q = (\beta)A_q (\beta\alpha)C_p \quad (\alpha < J_2).$$

Nach (3, 8) ist aber die linke Seite von (3) gleich $(\alpha)A_{pq}$ und die rechte gleich $(\alpha)A_{qp}$; sobald (3, 8) erfüllt ist, ist wegen $(\alpha)A_{pq} = (\alpha)A_{qp}$ auch (3) erfüllt. Es verbleibt somit nur mehr der Fall $\alpha < J_1$.

Setzen wir ohne Rücksichtnahme auf den tensoriellen Charakter

$$(4) \quad (\alpha pq) = \frac{\partial_{(\alpha)A_p}}{\partial y_q} - \frac{\partial_{(\alpha)A_q}}{\partial y_p},$$

so folgt aus (2)

$$(5) \quad (\alpha pq) (\alpha)A_r - (\alpha qr) (\alpha)A_p + (\alpha rp) (\alpha)A_q = 2 (\beta\alpha)C_p (\beta)A_q (\alpha)A_r.$$

Da die Determinante $|(\alpha)A_p| \neq 0$ ist, können wir das dem l -Bein $(\alpha)A_p$ adjungierte l -Bein $(\alpha)A^q$ bilden, so daß also

$$(6) \quad (\alpha)A_p (\alpha)A^q = \delta_p^q \quad \text{und} \quad (\alpha)A_p (\beta)A^p = \delta_{\alpha\beta}$$

gilt. Durch Überschiebung von (5) mit $(\gamma)A^s (\varepsilon)A^r$ folgt

$$(6') \quad 2_{(\gamma\varepsilon)C_p} = [(\alpha pq) (\alpha)A_r - (\alpha qr) (\alpha)A_p + (\alpha rp) (\alpha)A_q] (\gamma)A^s (\varepsilon)A^r,$$

wo γ und ε Indizes des J_1 -Raumes sind. Man beachte, daß

$$(\gamma\varepsilon)C_p = -(\varepsilon\gamma)C_p,$$

wie notwendig zu erwarten war, gilt.

Wir notieren: Aus den Tensoren erster Stufe $(\alpha)A_p$ und deren Ableitungen lassen sich die $(\alpha\beta)C_p$ für $\alpha, \beta < J_1$ eindeutig berechnen.

Da es für $\alpha < J_1$ gerade $l \binom{l}{2}$ Gleichungen (2) gibt und wir aus ihnen die $l \binom{l}{2}$ Vektoren $(\gamma\epsilon)C_p$ ($\gamma, \epsilon < J_1$) berechneten, so verbleiben keine Bedingungsgleichungen aus dem System (2).

Das System (2) ist nun erschöpft; die weiteren $(\alpha\beta)C_p$, wo α und β Indizes desselben J_k sind, berechnen wir unter Benutzung der Integrabilitätsbedingungen

$$(7) \quad \left[\frac{\partial_{(\alpha\beta)} C_p}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial_{(\alpha\beta)} C_q}{\partial y_\beta} + (\alpha\gamma)C_p(\gamma\beta)C_q - (\alpha\gamma)C_q(\gamma\beta)C_p \right] (\beta)\lambda_i = 0$$

des Systems (Ia), welche infolge der Unabhängigkeit der $(\beta)\lambda_i$ mit dem System

$$(8) \quad (\alpha\beta)X_{p\alpha} = \frac{\partial_{(\alpha\beta)} C_p}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial_{(\alpha\beta)} C_q}{\partial y_\beta} + (\alpha\gamma)C_p(\gamma\beta)C_q - (\alpha\gamma)C_q(\gamma\beta)C_p = 0$$

äquivalent sind. Die Berechnung ergibt, wie sogleich gezeigt wird, gewisse Bedingungsgleichungen, die ein Formensystem zu erfüllen hat, wenn es das System der Formen einer F_i des R_n sein soll. Da $(\alpha\beta)X_{p\alpha} = -(\beta\alpha)X_{p\alpha}$ ist, so können wir uns die Integrabilitätsbedingungen (8) so geordnet denken, daß aus $\alpha < J_f$, $\beta < J_g$ stets $f \leq g$ folgt.

Nun setzen wir voraus, wir hätten für $h \leq k$ die $(\epsilon\gamma)C_p$ ($\epsilon, \gamma < J_h$) berechnet, und zwar mittels der Tensoren $(\alpha)A_{p_1 \dots p_i}$ bis zur h ten Stufe und deren Ableitungen. Für $k=1$ trifft dies zu. Bei dieser Berechnung sei das Teilsystem der geordneten Integrabilitätsbedingungen $(\alpha\beta)X_{p\alpha} = 0$ ($\alpha < J_j$, $j < k$) bereits aufgebraucht worden, was für $k=1$ ebenfalls zutrifft, da ein solches Teilsystem dann nicht existiert.

Wir zeigen dann, daß wir bei Verwendung von

$$(\alpha\beta)X_{p\alpha} = 0, \quad \alpha < J_k$$

die $(\epsilon\gamma)C_p$ für $\epsilon, \gamma < J_{k+1}$ berechnen können, und zwar ausgedrückt in den Tensoren $(\alpha)A_{p_1 \dots p_i}$ bis zur $k+1$ ten Stufe und deren Ableitungen.

Das System der $(\alpha\beta)X_{p\alpha} = 0$ ($\alpha < J_k$) zerfällt seinerseits in drei Teilsysteme, je nachdem $\beta < J_k$, $\beta < J_{k+1}$ oder $\beta < J_{k+2}$ ist. Für $\beta < J_{k+j}$, $j > 2$ verschwindet es identisch. Wir spalten $(\alpha\beta)X_{p\alpha}$ in zwei Summanden wie folgt:

$$(9) \quad (\alpha\beta)X_{p\alpha} = (\alpha\beta)Y_{p\alpha}^{(k)} + (\alpha\beta)Z_{p\alpha}^{(k)},$$

wo

$$(10) \quad (\alpha\beta)Y_{p\alpha}^{(k)} = \frac{\partial_{(\alpha\beta)} C_p}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial_{(\alpha\beta)} C_q}{\partial y_\beta} + \sum_{\gamma < J_\rho} (\alpha\gamma)C_p(\gamma\beta)C_q - \sum_{\gamma < J_\rho} (\alpha\gamma)C_q(\gamma\beta)C_p$$

$$(\rho = k-1, k)$$

nach Voraussetzung bereits bekannt ist, und allein

$$(11) \quad (\alpha\beta)Z_{pq}^{(k)} = \sum_{\gamma < J_{k+1}} (\alpha\gamma)C_p(\gamma\beta)C_q - \sum_{\gamma < J_{k+1}} (\alpha\gamma)C_q(\gamma\beta)C_p$$

die zu berechnenden $(\alpha\gamma)C_p$ ($\alpha, \gamma < J_{k+1}$) enthält. Das System $(\alpha\beta)X_{pq} = 0$, $\alpha < J_k$ schreiben wir demnach in der Form

$$(12) \quad - (\alpha\beta)Y_{pq}^{(k)} = (\alpha\beta)Z_{pq}^{(k)}$$

an. Da der Rang der Matrix

$$(13) \quad \left\| (\alpha)A_{v_1 v_2 \dots v_k} \right\|$$

der l_k Tensoren k ter Stufe gleich l_k ist, so ist $(\alpha\beta)X_{pq} = 0$ ($\alpha < J_k$) mit $(\alpha\beta)X_{pq}(\alpha)A_{v_1 v_2 \dots v_k} = 0$ identisch oder das System (12) mit

$$(14) \quad - (\alpha\beta)Y_{pq}^{(k)}(\alpha)A_{v_1 \dots v_k} = (\alpha\beta)Z_{pq}^{(k)}(\alpha)A_{v_1 \dots v_k} \\ = \sum_{\gamma < J_{k+1}} [(\alpha\gamma)C_p(\alpha)A_{v_1 \dots v_k}] (\gamma\beta)C_q - \sum_{\gamma < J_{k+1}} [(\alpha\gamma)C_q(\alpha)A_{v_1 \dots v_k}] (\gamma\beta)C_p.$$

Nach (3, 8) können wir (14) schreiben

$$(14') \quad - (\alpha\beta)Y_{pq}^{(k)}(\alpha)A_{v_1 \dots v_k} = (\gamma)A_{v_1 \dots v_k p} (\gamma\beta)C_q - (\gamma)A_{v_1 \dots v_k q} (\gamma\beta)C_p.$$

Wir erledigen die drei Teilsysteme von (14') $\beta < J_k$, $\beta < J_{k+1}$, $\beta < J_{k+2}$ nacheinander.

Erster Fall: $\beta < J_k$. Das System (14') ist dann äquivalent dem Systeme

$$(15) \quad - (\alpha\beta)Y_{pq}^{(k)}(\alpha)A_{v_1 \dots v_k}(\beta)A_{\mu_1 \dots \mu_k} \\ = - (\gamma)A_{v_1 \dots v_k p} (\gamma)A_{\mu_1 \dots \mu_k q} + (\gamma)A_{v_1 \dots v_k q} (\gamma)A_{\mu_1 \dots \mu_k p}.$$

Wir nennen den Tensor

$$(16) \quad (\gamma)A_{v_1 \dots v_k p} (\gamma)A_{\mu_1 \dots \mu_k q} - (\gamma)A_{v_1 \dots v_k q} (\gamma)A_{\mu_1 \dots \mu_k p}$$

den k ten Krümmungstensor der F_1 . Obwohl er aus den Tensoren $k+1$ ter Stufe hergeleitet wurde, läßt er sich nach (15) durch die Tensoren bis zur k ten Stufe und deren Ableitungen darstellen. Das System (15) stellt reine Beziehungen zwischen den Formenkoeffizienten dar, die erfüllt sind, sobald diesen eine F_1 entspricht.

Wir nennen diese Bedingungengleichungen *das System der Gaußschen Krümmungsrelationen unserer F_1* , da in der Tat für die F_2 des euklidischen R_3 (15) die bekannte Relation $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = K(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)$ darstellt, wo die b_{ik} die Koeffizienten der zweiten Grundform (der Haupttensor) sind.

Zweiter Fall: $\beta < J_{k+1}$. Wir schreiben für die bereits bekannte linke Seite von (14') abkürzend

$$(\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k, pq)\beta,$$

aus (20) können wir jetzt, und zwar eindeutig, die $(\gamma\beta)C_p$ ($\gamma, \beta < J_{k+1}$) berechnen.

In der Tat! Die Matrix

$$(21) \quad \|({}_{\gamma})A_{v_1 v_2 \dots v_{k+1}}\| \quad (\gamma < J_{k+1}),$$

hat den Rang l_{k+1} , und wir können aus ihr eine Determinante l_{k+1} ter Ordnung herausheben, die nicht Null ist. Wir fassen dann jenes Teilsystem von (20) ins Auge, in welchem die $(\gamma)A_{v_1 \dots v_{k+1}}$, $(\beta)A_{\mu_1 \dots \mu_{k+1}}$ Elemente dieser Determinante sind.

Dieses Teilsystem stellt bei festem p ein System von $\binom{l_{k+1}}{2}$ inhomogenen linearen Gleichungen für die $\binom{l_{k+1}}{2}$ Größen $(\gamma\beta)C_p$ ($\gamma, \beta < J_{k+1}$) dar, wobei die Determinante der Koeffizienten der $(\gamma\beta)C_p$ nicht verschwindet, da ihre Elemente ja die Minoren zweiter Ordnung unserer nicht verschwindenden Determinante sind.¹⁾

Wir können demnach das ausgewählte Teilsystem zur Berechnung der $\binom{l_{k+1}}{2}$ Vektoren $(\gamma\beta)C_p$ ($\gamma, \beta < J_k$) verwenden, und zwar erhalten wir diese Vektoren allein bestimmt durch die Tensoren bis zur $k+1$ ten Stufe bzw. deren Ableitungen. Vielleicht ist es nicht unnütz, darauf hinzuweisen, daß bei dieser Berechnung nur Ableitungen der Tensoren bis zur k ten Stufe auftreten. Da wir für die Berechnung der $(\gamma\beta)C_p$ ($\gamma, \beta < J_{k+1}$) nur ein Teilsystem von

$$({}_{\alpha\beta})X_{p\alpha} = 0 \quad (\alpha < J_k, \beta < J_{k+1})$$

verwendeten, so verbleiben Bedingungsgleichungen für die Formenkoeffizienten, die wir die Codazzischen Relationen des Formensystems nennen wollen.

Eine Bemerkung: Vertauscht man im Symbole $\binom{v_1 \dots v_{k+1}}{\mu_1 \dots \mu_{k+1}} | p$ die ν und μ , so ändert dieses das Vorzeichen. Daraus und aus (20) folgt $(\gamma\beta)C_p = -(\beta\gamma)C_p$.

Dritter Fall: $\beta < J_{k+2}$. Dann ist $(\alpha\beta)Y_{pp}^{(k)} = 0$ und aus (14') wird

$$(22) \quad 0 = ({}_{\gamma})A_{v_1 \dots v_k p} ({}_{\gamma\beta})C_p - ({}_{\gamma})A_{v_1 \dots v_k q} ({}_{\gamma\beta})C_p,$$

eine Relation, die wegen (3, 8) und der Symmetrie der Tensoren $k+2$ ter Stufe $(\beta)A_{v_1 \dots v_{k+2}}$ erfüllt ist, also keine neuen Bedingungsgleichungen liefert. Damit ist das System $(\alpha\beta)X_{p\alpha} = 0$ ($\alpha < J_k$) erschöpft!

War der J_k -Raum der letzte Normalenraum der F_i , d. h. existiert der J_{k+1} bereits nicht mehr, so ist von den drei eben diskutierten Fällen nur der eine

1) Das Produkt der Determinante dieser Minoren mit der aus den algebraischen Komponenten dieser Minoren gebildeten Determinante ergibt ja eine Potenz der nicht verschwindenden Determinante.

$\alpha \prec J_k, \beta \prec J_k$ zu behandeln; es verschwindet dann der k te Krümmungstensor (16), und statt (15) gilt

$$(23) \quad (\alpha\beta) \underset{pq}{Y}^{(k)} A_{\nu_1} \dots \nu_k \cdot (\beta) A_{\mu_1} \dots \mu_k = 0.$$

Ist wie im Falle der F_2 im euklidischen R_3 dieser letzte Normalenraum eindimensional, so gibt es wegen

$$(\alpha\beta) \underset{pq}{Y}^{(k)} = - (\beta\alpha) \underset{pq}{Y}^{(k)}$$

keine letzten Krümmungsgleichungen (23).

Wir fassen das Ergebnis zusammen: *Erfüllt ein gegebenes Formensystem*

$$(24) \quad (\alpha) A_{\nu_1} \dots \nu_i \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots)$$

die soeben abgeleiteten Bedingungsgleichungen, und zwar

- a) die algebraischen,
- b) die Gaußschen,
- c) die Codazzischen,

so lassen sich die $(\alpha\beta)C_p$, und zwar eindeutig, so berechnen, daß die Integrabilitätsbedingungen des Systems totaler Differentialgleichungen (I) und die Relationen (3, 3), (3, 5) und (3, 8) erfüllt sind. Die $(\alpha\beta)C_p$ sind durch die Tensoren (24) und deren Ableitungen bis einschließlich zur h ten Stufe darstellbar, wenn der größere der beiden Indizes α, β ein Index des J_k ist.

§ 5. Das Formenproblem.

Sind für ein System von ν linear unabhängigen Tensoren (Formen) einer l dimensionalen Mannigfaltigkeit¹⁾

$$(I) \quad \begin{cases} (\alpha) A_p & (\alpha = 1, \dots, \nu) \\ (\alpha) A_{pq} & (\alpha = l+1, \dots, l+l_2) \\ (\alpha) A_{pqr} & (\alpha = l+l_2+1, \dots, l+l_2+l_3) \\ \dots \end{cases}$$

die am Schlusse des vorhergehenden Paragraphen aufgezählten Bedingungsrelationen erfüllt, so kann man die Koeffizientenvektoren $(\alpha\beta)C_p$ des Systems totaler Differentialgleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} dx_i = (\alpha) A_p (\alpha) \lambda_i \, dy_p \\ d(\alpha) \lambda_i = (\alpha\beta) C_p (\beta) \lambda_i \, dy_p \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, \nu; p = 1, \dots, l; i = 1, \dots, \nu)$$

eindeutig so berechnen, daß neben den Integrabilitätsbedingungen des Systems (1) die Relationen (3, 3), (3, 5) und (3, 8) *identisch* befriedigt sind.

1) D. h. die Koeffizienten in (I) sind Funktionen von y_1, \dots, y_l (also in einer l dimensionalen Mannigfaltigkeit definiert), und die Indizes p, q, r, \dots laufen von 1 bis l .

Es gibt dann, sofern die Tensoren (I) und deren Ableitungen so weit stetig vorausgesetzt sind, daß die berechneten ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ selbst stetige Vektoren sind, ein bestimmtes Lösungssystem von (1)

$$(2) \quad \begin{cases} {}_{(\alpha)}\lambda_i = {}_{(\alpha)}\lambda_i(y_1, \dots, y_l) \\ x_i = x_i(y_1, \dots, y_l) \end{cases} \quad (\alpha=1, \dots, \nu, i=1, \dots, n),$$

das den gegebenen Anfangswerten

$$(3) \quad \begin{cases} {}_{(\alpha)}\lambda_i^0 = {}_{(\alpha)}\lambda_i(y_1^0, \dots, y_l^0) \\ x_i^0 = x_i(y_1^0, \dots, y_l^0) \end{cases} \quad (\alpha=1, \dots, \nu, i=1, \dots, n)$$

entspricht. Wir setzen

$$(4) \quad {}_{(\alpha\beta)}\Phi = {}_{(\alpha)}\lambda_i {}_{(\beta)}\lambda_i.$$

Diese Skalare genügen dann wegen (1) gleichfalls einem Systeme totaler Differentialgleichungen

$$(5) \quad d{}_{(\alpha\beta)}\Phi = [{}_{(\beta\gamma)}\Phi {}_{(\alpha\gamma)}C_p + {}_{(\alpha\gamma)}\Phi {}_{(\beta\gamma)}C_p] dy_p \quad (\alpha, \beta, \gamma=1, \dots, \nu).$$

Wegen ${}_{(\alpha\beta)}C_p = -{}_{(\beta\alpha)}C_p$ ist ${}_{(\alpha\beta)}\Phi = \delta_{\alpha\beta}$ ein Lösungssystem von (5), und zwar jenes eindeutig bestimmte, das für y_1^0, \dots, y_l^0 die Anfangswerte ${}_{(\alpha\beta)}\Phi^0 = \delta_{\alpha\beta}$ annimmt.

Ist $n \geq \nu$, so können wir im Punkte $P_0(y_1^0, \dots, y_l^0)$ unserer l -dimensionalen Mannigfaltigkeit die Anfangswerte ${}_{(\alpha)}\lambda_i^0$ so wählen, daß

$$(6) \quad {}_{(\alpha)}\lambda_i^0 {}_{(\beta)}\lambda_i^0 = \delta_{\alpha\beta} \quad (i=1, \dots, n; \alpha, \beta=1, \dots, \nu)$$

wird. Nach dem eben Gesagten gilt für das so bestimmte Lösungssystem (2) von (1) für jedes l -Tupel y_1, \dots, y_l

$$(6') \quad {}_{(\alpha)}\lambda_i {}_{(\beta)}\lambda_i = \delta_{\alpha\beta}.$$

Deuten wir dieses Lösungssystem dann in einem auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen euklidischen $R_n \{x_1, \dots, x_n\}$, so stellt es eine F_i dieses R_n dar, in deren Punkten das normierte ν -Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ($\alpha=1, \dots, \nu$) definiert ist.

Wir behaupten nun, daß dieses ν -Bein die J_k -Vektorräume dieser F_i aufspannt und daß die ihm adjungierten Formen gerade die Formen (I) sind.

Wenn wir im folgenden $\beta < J_k$ schreiben, so bedeutet das vorerst nur, daß der Index β unter den Indizes α der Tensoren k ter Stufe ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k}$ vertreten ist. Aus der Art der Berechnung der ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ folgt wegen (3, 5) und (3, 8)

$$(6'') \quad \begin{cases} {}_{(\alpha\beta)}C_p = 0 & (\alpha < J_k, \beta < J_{k \pm r}, r > 1) \\ {}_{(\alpha)}A_{r_1 \dots r_k} r_{k+1} = {}_{(\gamma\alpha)}C_{r_{k+1}} {}_{(\gamma)}A_{r_1 \dots r_k} & (\alpha < J_{k+1}, \gamma < J_k). \end{cases}$$

Nun schreiben wir die erste Gleichung des Systems (1)

$$(7) \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_p} = {}_{(\alpha)}A_p {}_{(\alpha)}\lambda_i \quad (\alpha \prec J_1).$$

Durch Überschiebung mit ${}_{(\beta)}\lambda_i$ ($\beta \prec J_1$) folgt

$$(7') \quad {}_{(\beta)}A_p = \frac{\partial x_i}{\partial y_p} {}_{(\beta)}\lambda_i.$$

Nach (7) und (7') haben die Matrizen $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \right\|$ und $\| {}_{(\alpha)}A_p \|$ den gleichen Rang. Da die zweite infolge der vorausgesetzten Unabhängigkeit der l Linearformen ${}_{(\alpha)}A_p$ den Rang l hat, so gilt dies ebenfalls für die erste Matrix. Die Mannigfaltigkeit $x_i = x_i(y_1, \dots, y_l)$ ist somit in der Tat eine F_l , deren Tangentenraum nach (7) durch das normierte l -Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ aufgespannt ist. Nach (7') ist ${}_{(\alpha)}A_p$ ($\alpha \prec J_k$) das diesem l -Bein adjungierte Formensystem.

Durch Differentiation von (7) erhalten wir wegen (1)

$$(8) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} = \left[\frac{\partial {}_{(\alpha)}A_p}{\partial y_q} + {}_{(\gamma)}A_p {}_{(\gamma\alpha)}C_q \right] {}_{(\alpha)}\lambda_i.$$

Nach (6'') treten in die Darstellung (8) nur die Indizes $\alpha \prec J_1$, $\alpha \prec J_2$ ein. Für die Projektion des Vektors (8) in den ersten Normalenraum gilt nach (8)

$$(9) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} = {}_{(\gamma)}A_p {}_{(\gamma\alpha)}C_q {}_{(\alpha)}\lambda_i \quad (\alpha \prec J_2),$$

also nach (6'')

$$(9') \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} = {}_{(\alpha)}A_{p\alpha} {}_{(\alpha)}\lambda_i \quad (\alpha \prec J_2).$$

Durch Überschiebung von (9') mit ${}_{(\beta)}\lambda_i$ folgt

$$(9'') \quad {}_{(\beta)}A_{p\alpha} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} {}_{(\beta)}\lambda_i \quad (\alpha \prec J_2).$$

Nach (9'), (9'') haben die Matrizen $\left\| \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} \right\|$ und $\| {}_{(\alpha)}A_{p\alpha} \|$ den gleichen Rang. Infolge der linearen Unabhängigkeit der l_2 Tensoren ${}_{(\alpha)}A_{p\alpha}$ ist dieser Rang gleich l_2 . Der J_2 -Raum unserer F_2 ist also l_2 dimensional und wird nach (9) durch das normierte l_2 -Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ($\alpha \prec J_2$) aufgespannt. Nach (9'') ist ${}_{(\beta)}A_{p\alpha}$ ($\beta \prec J_2$) das diesem l_2 -Bein adjungierte Formensystem.

Sei nun diese Tatsache bereits für den J_k und die vorhergehenden Vektorräume festgestellt. Es gelte also

$$(10) \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}} = {}_{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k} {}_{(\alpha)}\lambda_i \quad (\alpha \prec J_k),$$

eine Relation, die für $k = 2$ in der Tat nachgewiesen wurde. Aus (10) folgt durch Differentiation

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}} \left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}} \right) = \text{Vektor des } J_{12 \dots k} + \sum_{\beta \prec J_{k+1}} {}^{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k} {}^{(\alpha\beta)}C_{p_{k+1}} {}^{(\beta)}\lambda_i \\ = \text{Vektor des } J_{12 \dots k} + \sum_{\beta \prec J_{k+1}} {}^{(\beta)}A_{p_1 \dots p_k} {}^{(\beta)}\lambda_i.$$

Da aber nach (3, 7) die Projektion der linken Seite in den J_{k+1} gleich $\frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k} \partial y_{p_{k+1}}}$ ist, so gilt

$$(12) \quad \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k} \partial y_{p_{k+1}}} = {}^{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k} {}^{(\alpha)}\lambda_i \quad (\alpha \prec J_{k+1}).$$

Damit haben wir den Satz I:

Zu einem Formensysteme (I), das die in § 4 angeführten Relationen erfüllt, gibt es immer eine F_i , die dieses Formensystem besitzt.

Die Tensoren (I) einer F_i sind infolge ihrer Bildung als innere Produkte von Vektoren (2, 4) invariant gegenüber den Transformationen der Bewegungsgruppe

$$(13) \quad \bar{x}_i = a_{ik} x_k + b_i,$$

wo $\|a_{ik}\|$ eine orthogonale Matrix ist. Da zwei kongruente (bzw. kongruente und gespiegelte) F_i mittels einer Transformation (13) zusammenhängen, so ist jedes Formensystem der einen ein solches der anderen. Die Gesamtheit der äquivalenten Formensysteme der beiden F_i ist gleich. Umgekehrt aber gilt der Satz II:

Zwei F_i mit gleichem Formensystem sind kongruent bzw. kongruent und gespiegelt.

Seien F_i und \bar{F}_i zwei solche Flächen, die also ein-eindeutig aufeinander so bezogen seien, daß in entsprechenden Punkten die Tensoren (I) die nämlichen Komponenten haben. Dem Parameter l -Tupel y_1^0, \dots, y_l^0 entspreche auf der F_i der Punkt P_0 und auf der \bar{F}_i der (P_0 zugeordnete) Punkt \bar{P}_0 .

Weiter seien ${}^{(\alpha)}\lambda_i$ und ${}^{(\alpha)}\bar{\lambda}_i$ die die J_k -Räume der F_i bzw. \bar{F}_i aufspannenden normierten ν -Beine, deren adjungierte Formen nach Voraussetzung übereinstimmen. Durch eine Transformation der Gruppe (13) können wir das ν -Bein in P_0 , ${}^{(\alpha)}\lambda_i^0$, in das ν -Bein ${}^{(\alpha)}\bar{\lambda}_i^0$ in \bar{P}_0 transformieren, wobei die F_i in eine ihr kongruente F_i mit gleichem Formensystem übergeht, die mit der \bar{F}_i die „Lage“ (\bar{P}_0 , ${}^{(\alpha)}\bar{\lambda}_i^0$) gemeinsam hat. Der \bar{F}_i und der \bar{F}_i , die dasselbe Formensystem besitzen, entspricht das bestimmte System (1) totaler Differentialgleichungen, und da die beiden Hyperflächen eine Lage gemeinsam haben und durch diese Lage und (1) die beiden F_i eindeutig bestimmt sind, so sind sie identisch.

Also läßt sich die F_i durch eine Transformation der Bewegungsgruppe in die \bar{F}_i transformieren, d. h. die beiden Flächen sind kongruent (oder kongruent und gespiegelt).

§ 6. Die Formenquadrate.

Es seien ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ und ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i$ zwei äquivalente, die J_k -Räume einer F_i aufspannende ν -Beine und ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k}$ und ${}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \dots p_k}$ die diesen Beinen adjungierten Formen dieser F_i . Dann gilt

$$(1) \quad {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i = {}_{(\alpha\beta)}a_{(\beta)}\lambda_i \quad (\alpha, \beta \prec J_k),$$

wobei die Matrix

$$(1') \quad \| {}_{(\alpha\beta)}a \| \quad (\alpha, \beta \prec J_k)$$

orthogonal ist. Wegen (2, 4) gilt dann für die äquivalenten Formen eine zu (1) analoge Beziehung

$$(2) \quad {}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \dots p_k} = {}_{(\alpha\beta)}a_{(\beta)}A_{p_1 \dots p_k} \quad (\alpha, \beta \prec J_k),$$

die für die Äquivalenz zweier Formensysteme — insofern die gleiche Parameterdarstellung der F_i zugrunde liegt — auch hinreichend ist. Aus (2) folgt

$$(3) \quad {}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \dots p_k} {}_{(\alpha)}\bar{A}_{q_1 \dots q_k} = {}_{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k} {}_{(\alpha)}A_{q_1 \dots q_k},$$

d. h. der Tensor

$$(4) \quad E_{p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_k} = {}_{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k} {}_{(\alpha)}A_{q_1 \dots q_k}$$

ist von der besonderen Wahl des die J_k -Räume aufspannenden normierten ν -Beins unabhängig. Dieser Tensor ist nach (2, 4) auch gleich

$$(4') \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \dots \partial y_{q_k}} = E_{p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_k}.$$

Wie (3) aus (2) folgte, so ist umgekehrt (2) eine Folge von (3), denn wegen der linearen Unabhängigkeit der l_k Tensoren ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k}$ bzw. ${}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \dots p_k}$ ist neben (4)

$$(5) \quad E_{p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_k} = {}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \dots p_k} {}_{(\alpha)}\bar{A}_{q_1 \dots q_k}$$

die kanonische Darstellung des Tensors $2k$ ter Stufe $E_{p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_k}$ durch die Tensoren k ter Stufe ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k}$ bzw. ${}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \dots p_k}$. Man betrachte, um dies einzusehen, einen Tensor $t_{p_1 \dots p_k}$ als „Vektor“ in einem Punkte eines R_N von der Dimension $N = \binom{l+k-1}{k}$. Daraus folgt dann sofort, daß zwischen den ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k}$ und den ${}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \dots p_k}$ eine Transformation (2) mit orthogonaler Matrix besteht. Wir wollen jedoch noch einen direkten Beweis geben.

Es gibt ∞^r , $r = \binom{l+k-1}{k} - l_k$ Systeme von l_k Tensoren ${}_{(\alpha)}\bar{A}^{q_1 \dots q_k}$, die der Tensorrelation

$$(6) \quad {}_{(\alpha)}\bar{A}^{q_1 \dots q_k} {}_{(\beta)}\bar{A}^{q_1 \dots q_k} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta \prec J_k)$$

genügen. Ist dann

$$(6') \quad (a) \bar{A}^{a_1 \dots a_k} \quad (a \leftarrow J_k)$$

ein solches System, so folgt durch Überschiebung von (3) mit $(\beta) \bar{A}^{a_1 \dots a_k}$

$$(7) \quad (\beta) \bar{A}_{p_1 \dots p_k} = (\beta a) b_{(a) A_{p_1 \dots p_k}},$$

$$(7') \quad (\beta a) b = (a) A_{a_1 \dots a_k} (\beta) \bar{A}^{a_1 \dots a_k}.$$

Aus (5) und (6) folgt

$$(8) \quad E_{p_1 \dots p_k | a_1 \dots a_k} (\beta) \bar{A}^{a_1 \dots a_k} = (\beta) \bar{A}_{p_1 \dots p_k}$$

und weiter aus

$$(9) \quad \begin{aligned} (\beta a) b_{(\gamma a) b} &= (a) A_{a_1 \dots a_k} (a) A_{p_1 \dots p_k} (\beta) \bar{A}^{a_1 \dots a_k} (\gamma) \bar{A}^{p_1 \dots p_k} \\ &= E_{p_1 \dots p_k | a_1 \dots a_k} (\beta) \bar{A}^{a_1 \dots a_k} (\gamma) \bar{A}^{p_1 \dots p_k} \\ &= (\beta) \bar{A}_{p_1 \dots p_k} (\gamma) \bar{A}^{p_1 \dots p_k} = \delta_{\beta \gamma} \end{aligned}$$

die Orthogonalität der Matrix $\| (\alpha \beta) b \|$.

Durch die $E_{p_1 \dots p_k | a_1 \dots a_k}$ ist also das System der Tensoren $(a) A_{p_1 \dots p_k}$ bis auf orthogonale Transformationen, d. h. bis auf Äquivalenzen bestimmt. Die Anzahl der unabhängigen Tensoren $(a) A_{p_1 \dots p_k}$, die in die kanonische Darstellung eintreten, ist gleich dem Range der Matrix

$$(10) \quad \left\| E_{p_1 \dots p_k | a_1 \dots a_k} \right\|,$$

wo jeder Kombination p_1, \dots, p_k bzw. a_1, \dots, a_k eine Zeile bzw. Spalte entspricht. Der Rang der Matrix (10) stimmt demnach mit der Dimension l_k des J_k überein.

Die Tensoren

$$(11) \quad E_{p | a}, \quad E_{p_1 p_2 | a_1 a_2}, \dots, \quad E_{p_1 \dots p_k | a_1 \dots a_k}, \dots,$$

die das System

$$(12) \quad (a) A_p, \quad (a) A_{p_1 p_2}, \dots, \quad (a) A_{p_1 \dots p_k}, \dots$$

bis auf Äquivalenzen festlegen, bestimmen demnach auch eine gegebene F_i bis auf Kongruenz (und Spiegelung).

Dasselbe gilt für die aus ihnen gebildeten Formen

$$(13) \quad E_{p | a} dy_p dy_a, \quad E_{p_1 p_2 | a_1 a_2} dy_{p_1} dy_{p_2} dy_{a_1} dy_{a_2}, \dots,$$

wenn wir zeigen können, daß diese Formen ihrerseits die Tensoren (11) bestimmen. Wegen $E_{p | a} = E_{a | p}$ können wir aus der (ersten) Form $E_{p | a} dy_p dy_a$, die im übrigen die Maßform der F_i ist, die Koeffizienten $E_{p | a}$ berechnen. Wir nehmen nun an, daß die Bestimmung der Tensoren (11) bis zur $2k - 2$ ten

Stufe aus den Formen (13) der Tensoren bis einschließlich $2k - 2$ ter Stufe bereits ausgeführt wäre, was für $k = 2$ ja der Fall ist. Bezeichnen wir mit $B_{p_1 p_2 \dots p_{2k}}$ den Koeffizienten von $dy_{p_1} dy_{p_2} \dots dy_{p_{2k}}$ in

$$E_{p_1 \dots p_k | a_1 \dots a_k} dy_{p_1} \dots dy_{p_k} dy_{a_1} \dots dy_{a_k},$$

so gilt

$$(14) \quad B_{p_1 p_2 \dots p_{2k}} = \sum E_{\sigma_1 \dots \sigma_k | \sigma_{k+1} \dots \sigma_{2k}},$$

wo die Summe rechts über alle verschiedenen Permutationen $\sigma_1, \dots, \sigma_{2k}$ von p_1, \dots, p_{2k} zu erstrecken ist. Nun ist $E_{p_1 \dots p_k | p_{k+1} \dots p_{2k}}$ sowohl in den k ersten wie in den k letzten Indizes symmetrisch. Bei Vertauschung eines der k ersten mit einem der k letzten Indizes gilt

$$(15) \quad E_{p_1 \dots p_{k-1} p_k | p_{k+1} \dots p_{2k-1} p_{2k}} - E_{p_1 \dots p_{k-1} p_{2k} | p_{k+1} \dots p_{2k-1} p_k} \\ = ({}_{\alpha}A_{p_1 \dots p_{k-1} p_k} {}_{\alpha}A_{p_{k+1} \dots p_{2k-1} p_{2k}} - ({}_{\alpha}A_{p_1 \dots p_{k-1} p_{2k}} {}_{\alpha}A_{p_{k+1} \dots p_{2k-1} p_k}).$$

Rechts steht nach (4, 16) der $k - 1$ te Krümmungstensor der F_i , der also durch die uns bekannten Formen bis zur $2k - 2$ ten Stufe ausdrückbar ist und somit als bereits bekannt zu gelten hat. Da sich jede der rechts in (14) auftretenden Größen $E_{\sigma_1 \dots \sigma_k | \sigma_{k+1} \dots \sigma_{2k}}$ durch eine beliebige von ihnen, z. B. $E_{p_1 \dots p_k | p_{k+1} \dots p_{2k}}$ durch fortgesetzte Vertauschung von Indizes gewinnen läßt, so kann man die rechte Seite von (14) in

$$E_{p_1 \dots p_k | p_{k+1} \dots p_{2k}} + \text{bekannte Größe}$$

umformen, und hierauf aus (14) $E_{p_1 \dots p_k | a_1 \dots a_k}$ berechnen. Wir haben damit den Nachweis geliefert, daß *das System der Formen (13)*

$$(16) \quad E_{p_1 \dots p_k | a_1 \dots a_k} dy_{p_1} \dots dy_{p_k} = \sum ({}_{\alpha}A_{p_1 \dots p_k} dy_{p_1} \dots dy_{p_k})^2 \quad (\alpha \prec j_k)$$

genau wie das System der ${}_{\alpha}A_{p_1 \dots p_k} dy_{p_1} \dots dy_{p_k}$ die F_i bis auf Kongruenz bestimmt.¹⁾

Die eigentliche Theorie der invarianten Formen einer F_i des euklidischen R_n ist damit beendet. Die Bedeutung der Formen wird durch die Tatsache erhellt, daß jede geometrische Größe der F_i sich durch diese Formen allein darstellen lassen muß.

1) Einen direkten, vom Formensystem der ${}_{\alpha}A_{p_1 \dots p_k} dy_{p_1} \dots dy_{p_k}$ keinen Gebrauch machenden Nachweis findet man in den Monatsheften für Math. u. Phys. XXXV: *Über das vollständige Formensystem einer F_i im R_n .*

§ 7. Die Einbettungszahl einer F_l .

Liegt eine F_l des euklidischen R_n in einer k dimensionalen Hyperebene E_k des R_n , dagegen in keiner $k-1$ dimensionalen E_{k-1} , so heiße k die *Einbettungszahl* der F_l ; dabei ist jedenfalls $l \leq k \leq n$.

Für die Einbettungszahl k besteht der Satz¹⁾: *Bedeutet l_σ die Dimensionszahl des J_σ der F_l , so ist*

$$(1) \quad k = \sum_{\sigma=1}^r l_\sigma,$$

wo J_r der letzte existierende J_σ -Vektorraum der F_l ist, die Einbettungszahl der F_l . Die Hyperebene geringster Dimension, in die die F_l eingebettet werden kann, ist jedenfalls eine E_k ; wenn wir nun zeigen, daß die F_l des R_n schon in einer E_k liegt, so ist der Satz bewiesen.

Durch die Gleichungen

$$(2) \quad x_{k+i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-k),$$

ist in unserem auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen R_n eine Hyperebene E_k definiert, in der

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

rechtwinklige kartesische Koordinaten sind. Der F_l entspricht das wiederholt benutzte System totaler Differentialgleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} dx_i = {}_{(\alpha)}A_p({}_\alpha)\lambda_i dy_p \\ d({}_\alpha)\lambda_i = {}_{(\alpha\beta)}C_p({}_\beta)\lambda_i dy_p \end{cases} \quad (\alpha, \beta=1, \dots, k, p=1, \dots, l),$$

das wir in der E_k (2), also für $i=1, \dots, k$, bei vorgeschriebener Anfangslage

$$(4) \quad x_i^0, \quad ({}_\alpha)\lambda_i^0 \quad (\alpha, i=1, \dots, k),$$

$$(4') \quad ({}_\alpha)\lambda_i^0 ({}_\beta)\lambda_i^0 = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta=1, \dots, k)$$

integrieren und so in der E_k (2) eine \bar{F}_l

$$(5) \quad x_i = x_i(y_1, \dots, y_l) \quad (i=1, \dots, k)$$

und in ihren Punkten das *normierte k -Bein*

$$(5') \quad ({}_\alpha)\lambda_i = ({}_\alpha)\lambda_i(y_1, \dots, y_l) \quad (i, \alpha=1, \dots, k)$$

mit dem Formensystem der gegebenen F_l erhalten.

Wir betrachten jetzt im R_n die \bar{F}_l

$$(6) \quad \begin{cases} x_i = x_i(y_1, \dots, y_l) & (i=1, \dots, k), \\ x_{k+i} = 0 & (i=1, \dots, n-k) \end{cases}$$

1) Man vergleiche den entsprechenden Satz für Kurven in IV, § 9.

und in deren Punkten das k -Bein

$$(7) \quad \begin{cases} (\alpha)\lambda_i = (\alpha)\lambda_i(y_1, \dots, y_l) & (\alpha, i=1, \dots, k), \\ (\alpha)\lambda_{k+\varepsilon} = 0 & (\varepsilon=1, \dots, n-k; \alpha=1, \dots, l), \end{cases}$$

das wegen $\sum_{i=1}^k (\alpha)\lambda_i (\beta)\lambda_i = \delta_{\alpha\beta}$ und $(\alpha)\lambda_{k+\varepsilon} = 0$ ebenfalls normiert ist. Wie (5) ist dann auch (6), (7) eine Lösung von (3), und da das k -Bein (7) normiert ist, so spannt es die J_k -Räume der \tilde{F}_l auf, und diese hat so wie die \bar{F}_l das Formensystem der F_l . Die F_l und die \tilde{F}_l sind also kongruent, und da die \tilde{F}_l in einer E_k liegt, so gilt das gleiche für die F_l , w. z. b. w.¹⁾

§ 8. Über die Krümmungstensoren der F_l .

Wir beweisen den Satz: *Verswindet für eine F_l des R_n der k te Krümmungstensor*

$$(1) \quad (y)A_{r_1 \dots r_k r_{k+1}} (y)A_{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1}} - (y)A_{r_1 \dots r_k \mu_{k+1}} (y)A_{\mu_1 \dots \mu_k r_{k+1}},$$

so gibt es stets eine \bar{F}_l des R_n , deren vollständiges Formensystem aus den Formen

$$(2) \quad (\alpha)A_p, \quad (\alpha)A_{pq}, \dots, \quad (\alpha)A_{p_1 \dots p_k}$$

der F_l bis einschließlich zur k ten Stufe besteht.

Für die F_l gelten die Gleichungen (5, 1), wo $\nu = l + l_2 + \dots + l_k + l_{k+1} + \dots$ die Einbettungszahl der F_l ist. Wir zeigen, daß folgendes aus (5, 1) gebildete System totaler Differentialgleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} dx_i = (\alpha)A_p (\alpha)\lambda_i dy_p \\ d(\alpha)\lambda_i = (\alpha\beta)C_p (\beta)\lambda_i dy_p \end{cases} \quad (\alpha, \beta=1, 2, \dots, l+l_2+\dots+l_k),$$

wo also die Indizes nur bis zum J_k auftreten, bereits vollständig integrierbar ist. „Aus (5, 1) gebildet“ bedeutet, daß die entsprechenden Koeffizientenvektoren, die in jenem System und in (3) auftreten, identisch sind. Diese Koeffizientenvektoren

$$(\alpha)A_p, \quad (\alpha\beta)C_p \quad (\alpha, \beta=1, 2, \dots, l+l_2+\dots+l_k)$$

1) Ist für das System $f_1(y, \dots, y_l), f_2(y_1, \dots, y_l), \dots, f_m(y_1, \dots, y_l)$ die Matrix $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial y_p} \right\|$ vom Range l und hat die Matrix

$$\left\| \dots \frac{\partial f_i}{\partial y_p} \dots \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_p \partial y_q} \dots \frac{\partial^3 f_i}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} \dots \frac{\partial^k f_i}{\partial y_{p_1} \dots \partial y_{p_k}} \dots \right\|$$

den Rang t , so bestehen $m-t$ lineare Relationen $\alpha_i^{(h)} f_i = 0$ ($h=1, \dots, m-t$) mit konstanten $\alpha_i^{(h)}$. Deutet man nämlich $x_i = f_i(y_1, \dots, y_l)$ in einem auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen R_m , so ist diese Bemerkung eine Folge des eben bewiesenen Satzes.

sind dann (§ 4 Schlußsatz) durch die Tensoren (2) allein ausdrückbar. Nun sind die ${}_{(\alpha\beta)}C_k$ ($\alpha, \beta < J_{12} \dots k$) aus den Formen (2) so berechnet, daß die Integrabilitätsbedingungen des Systems (3) völlig befriedigt sind bis auf die eine

$$(4) \quad {}_{(\alpha\beta)}X_{p\alpha} = 0 \quad (\alpha < J_k, \beta < J_k)$$

die sich nicht auf die entsprechende der F_l , d. h. des Systems (5, 1) reduziert. Nun lautet (4) in der Bezeichnungweise von (4, 10)

$$(5) \quad {}_{(\alpha\beta)}Y_{pq}^{(k)} = 0 \quad (\alpha, \beta < J_k)$$

und ist, da die Matrix $\|{}_{(\alpha)}A_{r_1 \dots r_k}\|$ den Rang l_k hat, mit

$$(6) \quad {}_{(\alpha\beta)}Y_{pq}^{(k)} {}_{(\alpha)}A_{r_1 \dots r_k} {}_{(\beta)}A_{\mu_1 \dots \mu_k} = 0$$

identisch. Nach (4, 15) ist die linke Seite von (6) aber gleich dem k ten Krümmungstensor, der nach Voraussetzung für die F_l verschwindet. Somit gilt (6), und wir können das System (3) bei beliebiger Anfangsbedingung für y_1^0, \dots, y_l^0 :

$$x_1^0, \dots, x_l^0, \quad {}_{(\alpha)}\lambda_i^0 \quad (\alpha=1, \dots, l+l_2+\dots+l_k)$$

$({}_{(\alpha)}\lambda_i^0 {}_{(\beta)}\lambda_i^0 = \delta_{\alpha\beta})$ integrieren und erhalten eine \bar{F}_l des Formensystems (2), deren Einbettungszahl $l+l_2+\dots+l_k$ ist.

Ist für eine F_l der erste Krümmungstensor Null, so gibt es eine \bar{F}_l mit demselben linearen Formensystem und der Einbettungszahl l , die also ein Teil einer E_l ist. Die Maßform der F_l

$$B_{p\alpha} = {}_{(\alpha)}A_p {}_{(\alpha)}A_\alpha \quad (\alpha=1, \dots, l)$$

ist auch die der E_l , also auf $B_{p\alpha} = \delta_{p\alpha}$ transformierbar. In der Tat ist für $k=1$ die linke Seite der Relation (4, 15) der RIEMANNsche Krümmungstensor der F_l .

§ 9. Kurven auf der F_l .

Sei

$$(1) \quad x_i = x_i(y_1, \dots, y_l) \quad (i=1, \dots, n)$$

die Parameterdarstellung einer F_l des auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen R_n und

$$(2) \quad y_p = y_p(s)$$

eine auf die Bogenlänge bezogene Kurve der F_l . Dann gilt für die Bogenlänge

$$(3) \quad ds^2 = dx_i dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial x_i}{\partial y_q} dy_p dy_q = {}_{(\alpha)}A_p {}_{(\alpha)}A_q dy_p dy_q$$

und für die Tangente

$$(3') \quad \frac{dx_i}{ds} = {}_{(1)}\xi_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{dy_p}{ds} = {}_{(\alpha)}A_p \frac{dy_p}{ds} {}_{(\alpha)}\lambda_i.$$

Für die Krümmungen und Normalen der Kurve gilt ($k = 2, 3, 4, \dots$)

$$(4) \quad \frac{{}_{(k)}\xi_i}{e_1 e_2 \dots e_{k-1}} = \sum_{\alpha < J_{12}} \dots \sum_{k-1} {}_{(\alpha)}T^{(k)} {}_{(\alpha)}\lambda_i + \sum_{\alpha < J_k} \left({}_{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k} \frac{d y_{p_1}}{d s} \dots \frac{d y_{p_k}}{d s} \right) {}_{(\alpha)}\lambda_i,$$

wo die Koeffizienten ${}_{(\alpha)}T^{(k)}$ durch die Tensoren ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k}$ der F_i bis einschließlich zur $k-1$ ten Stufe und durch die $\frac{d y_p}{d s}$, $\frac{d^2 y_p}{d s^2}$, \dots , $\frac{d^k y_p}{d s^k}$ ausdrückbar sind.

Die Formel gilt für $k=2$, da man aus (3') durch Differentiation nach s

$$(5) \quad \frac{{}_{(2)}\xi_i}{e_1} = \sum_{\alpha < J_1} \left[{}_{(\alpha)}A_p \frac{d^2 y_p}{d s^2} + \left(\frac{\partial {}_{(\omega)}A_p}{\partial y_\alpha} + {}_{(\beta)}A_p {}_{(\beta \omega)}C_\alpha \right) \frac{d y_p}{d s} \frac{d y_\alpha}{d s} \right] {}_{(\alpha)}\lambda_i \\ + \sum_{\alpha < J_2} \left({}_{(\alpha)}A_{p\alpha} \frac{d y_p}{d s} \frac{d y_\alpha}{d s} \right) {}_{(\alpha)}\lambda_i$$

erhält und die in der ersten Summe rechts auftretenden ${}_{(\alpha \beta)}C_\alpha$ ($\alpha, \beta < J_1$) allein durch die Tensoren erster Stufe ${}_{(\alpha)}A_p$ ausdrückbar sind.

Wir nehmen nun an, die Formel (4) sei bis zu einem gewissen m , also für $k = 2, 3, \dots, m$ bewiesen; wir zeigen dann ihre Richtigkeit für $k = m+1$.

Aus (4) erhalten wir durch Quadrieren

$$(6) \quad \frac{1}{(e_1 e_2 \dots e_{k-1})^2} = \sum_{\alpha < J_{12} \dots k-1} ({}_{(\alpha)}T^{(k)})^2 + \sum_{\alpha < J_k} \left({}_{(\alpha)}A_{p_1 \dots p_k} \frac{d y_{p_1}}{d s} \dots \frac{d y_{p_k}}{d s} \right)^2.$$

Das Produkt der $k-1$ ersten Krümmungen der Kurve (6) hängt somit von den Tensoren der F_i bis zur k ten Stufe inklusive und den $\frac{d y_p}{d s}$, $\frac{d^2 y_p}{d s^2}$, \dots , $\frac{d^k y_p}{d s^k}$ ab. Nun differenzieren wir (4) für $k = m$ nach s

$$(7) \quad \frac{d}{d s} \left(\frac{1}{e_1 \dots e_{m-1}} \right) {}_{(m)}\xi_i + \frac{1}{e_1 \dots e_{m-1}} \left[-\frac{{}_{(m-1)}\xi_i}{e_{m-1}} + \frac{{}_{(m+1)}\xi_i}{e_m} \right] \\ = \sum_{\alpha < J_{12} \dots m} {}_{(\alpha)}U {}_{(\alpha)}\lambda_i + \sum_{\alpha < J_{m+1}} {}_{(\gamma)}A_{p_1 \dots p_m} {}_{(\gamma \alpha)}C_{p_{m+1}} \frac{d y_{p_1}}{d s} \dots \frac{d y_{p_{m+1}}}{d s} {}_{(\alpha)}\lambda_i.$$

Die Koeffizienten ${}_{(\alpha)}U$ sind dabei durch die Tensoren der F_i bis einschließlich zur m ten Stufe und durch die $\frac{d y_p}{d s}$, $\frac{d^2 y_p}{d s^2}$, \dots , $\frac{d^{m+1} y_p}{d s^{m+1}}$ bestimmt.

Führt man ${}_{(m)}\xi_i$ und ${}_{(m-1)}\xi_i$ aus (4) in (7) ein und berücksichtigt man, daß die Größen $\frac{1}{e_1 \dots e_{m-1}}$ und $\frac{1}{e_{m-1}}$ als Quotient $\frac{1}{e_1 \dots e_{m-1}} : \frac{1}{e_1 \dots e_{m-2}}$ durch die Tensoren der F_i bis einschließlich zur m ten Stufe und durch die $\frac{d y_p}{d s}$, \dots , $\frac{d^m y_p}{d s^m}$ bestimmt sind, so erhält man (4) für $k = m+1$. Es gelten die Sätze:

Haben (bei entsprechender Wahl der Parameter und der die J_k -Räume aufspannenden ν -Beine) zwei Flächen des R_n , F_i und \bar{F}_i , das System der Formen bis einschließlich zur h ten Stufe gleich, so haben entsprechende Kurven gleiche Bogenlängen und gleiche Krümmungen bis einschließlich zur $h-1$ ten. Daß die Bogenlängen gleich sind, folgt aus (3), daß die Krümmungen gleich sind, aus (6) für $k=1, \dots, h$.

Besteht zwischen zwei Flächen F_i und \bar{F}_i des R_n eine punktweise Zuordnung, in der entsprechende Kurven gleiche Bogenlängen und gleiche Krümmungen bis einschließlich zur $h-1$ ten haben, so ist das Formensystem der beiden F_i bis zu den Formen h ter Stufe inklusive gleich. Aus (3) folgt die Identität der Formen $(\alpha)A_p (\alpha)A_q$ der beiden F_i , also die Äquivalenz der Linearformen, die bei geeigneter Wahl der ν -Beine zu einer Identität gemacht werden kann. Aus (6), für $k=2$, folgt dann die Identität der Formen $\sum_{\alpha \rightarrow J_2} ((\alpha)A_{p\alpha} dy_p dy_\alpha)^2$ der beiden F_i , die die Äquivalenz (Identität bei geeigneter Wahl der ν -Beine) der Formen zweiter Stufe nach sich zieht. Gilt der zweite Satz für $k-1 < h$, d. h. folgt aus der Gleichheit von Bogenlängen und Krümmungen bis einschließlich der $k-2$ ten die Gleichheit der Formen bis zur $k-1$ ten Stufe, so folgt, da $k \leq h$ ist, aus (6), deren linke Seite nach Annahme für beide F_i übereinstimmt, daß die beiden F_i auch die Form $\sum_{\alpha \rightarrow J_k} (A_{p_1 \dots p_k} dy_{p_1} \dots dy_{p_k})^2$ gleich haben. Gilt also der Satz für $\nu = k-1 < h$, so ist er somit für $\nu+1 = k \leq h$ und in der Folge für h selbst bewiesen.

§ 10. Das Formensystem der F_i im n dimensionalen Raum R_n der konstanten Krümmung ρ .

Den R_n denken wir uns auf irgendein zulässiges Koordinatensystem x_1, \dots, x_n bezogen, die F_i sei wie immer in der Parameterdarstellung

$$(1) \quad x_i = x_i(y_1, \dots, y_l)$$

gegeben. Weiter sei in den Punkten der F_i ein normiertes n -Bein

$$(1') \quad (\alpha)\lambda^i$$

gegeben, dessen nähere Bestimmung einstweilen nicht beabsichtigt ist. Der Vektor des R_n ¹⁾

$$(2) \quad \frac{\delta (\alpha)\lambda^i}{\delta y_j} = \frac{\partial (\alpha)\lambda^i}{\partial y_j} + \left\{ \begin{matrix} p & q \\ i \end{matrix} \right\} (\alpha)\lambda^p \frac{\partial x_q}{\partial y_j}$$

läßt sich dann mittels des n -Beins (1') darstellen:

$$(3) \quad \frac{\delta (\alpha)\lambda^i}{\delta y_j} = (\alpha\beta)C_j(\beta)\lambda^i \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n).$$

1) Fraktur- δ bezeichnet die absolute Ableitung im R_n (Parameter fest!).

Durch Überschiebung von (3) mit $(\gamma)\lambda_i$ ergibt sich wegen $(\gamma)\lambda_i(\alpha)\lambda^i = \delta_{\alpha\gamma}$

$$(4) \quad (\alpha\gamma)C_j = (\gamma)\lambda_i \frac{\partial(\alpha)\lambda^i}{\partial y_j} = -(\alpha)\lambda^i \frac{\partial(\gamma)\lambda_i}{\partial y_j} = -(\alpha)\lambda_i \frac{\partial(\gamma)\lambda^i}{\partial y_j} = -(\gamma\alpha)C_j,$$

also ist

$$(4') \quad (\alpha\beta)C_j = -(\beta\alpha)C_j.$$

Aus (3) bilden wir (4, 8)

$$(5) \quad \frac{\partial^2(\alpha)\lambda^i}{\partial y_h \partial y_j} - \frac{\partial^2(\alpha)\lambda^i}{\partial y_j \partial y_h} = (\alpha\beta)X_{jh}(\beta)\lambda^i.$$

Nun ist

$$(6) \quad \frac{\partial(\alpha)\lambda^i}{\partial y_j} = \frac{\partial(\alpha)\lambda^i}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_j},$$

also¹⁾

$$(6') \quad \frac{\partial^2(\alpha)\lambda^i}{\partial y_h \partial y_j} - \frac{\partial^2(\alpha)\lambda^i}{\partial y_j \partial y_h} = \left[\frac{\partial^2(\alpha)\lambda^i}{\partial x_s \partial x_r} - \frac{\partial^2(\alpha)\lambda^i}{\partial x_r \partial x_s} \right] \frac{\partial x_r}{\partial y_j} \frac{\partial x_s}{\partial y_h}.$$

Nach (VI, 2, 29) gilt also

$$(7) \quad -R^i{}_{crrs}(\alpha)\lambda^c \frac{\partial x_r}{\partial y_j} \frac{\partial x_s}{\partial y_h} = (\alpha\beta)X_{jh}(\beta)\lambda^i.$$

Wir bemerken für später, daß (7) die Integrabilitätsbedingungen von (3) sind.

Setzen wir noch

$$(8) \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_p} = (\alpha)A_p(\alpha)\lambda^i \quad (\alpha = 1, \dots, n),$$

so ist (7) äquivalent mit

$$(8') \quad -R^i{}_{prrs}(\alpha)\lambda^p(\beta)\lambda^r(\gamma)\lambda^s(\beta)A_j(\gamma)A_h = (\alpha\beta)X_{jh}(\beta)\lambda^i.$$

Durch Überschiebung mit $(\alpha)\lambda_i$ folgt

$$(9) \quad (\alpha\alpha)X_{jh} = -R_{iprrs}(\alpha)\lambda^i(\alpha)\lambda^p(\beta)\lambda^r(\gamma)\lambda^s(\beta)A_j(\gamma)A_h.$$

Nun gilt aber

$$(10) \quad R_{iprrs} = \varrho(g_{ir}g_{ps} - g_{is}g_{pr}),$$

andererseits ist wegen $(\alpha)\lambda_i(\beta)\lambda^i = \delta_{\alpha\beta}$

$$(g_{ir}g_{cs} - g_{is}g_{cr})(\alpha)\lambda^i(\alpha)\lambda^c(\beta)\lambda^r(\gamma)\lambda^s = \delta_{\epsilon\beta}\delta_{\alpha\gamma} - \delta_{\epsilon\gamma}\delta_{\alpha\beta},$$

also wird (9)

$$(\alpha\alpha)X_{jh} = -\varrho(\delta_{\epsilon\beta}\delta_{\alpha\gamma} - \delta_{\epsilon\gamma}\delta_{\alpha\beta})(\beta)A_j(\gamma)A_h = -\varrho[(\beta)A_j(\alpha)A_h - (\alpha)A_j(\beta)A_h].$$

Somit sind

$$(11) \quad (\alpha\beta)X_{jh} = \varrho[(\alpha)A_j(\beta)A_h - (\alpha)A_h(\beta)A_j]$$

die Integrabilitätsbedingungen des Systemes (3); sie treten an die Stelle der Relationen $(\alpha\alpha)X_{jh} = 0$ für $\varrho = 0$. Weiter benötigen wir die Integrabilitätsbedingungen des Systems (8); sie lauten¹⁾

1) Es ist $\frac{\partial}{\partial y_p} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_q} \right) = \frac{\partial}{\partial y_p} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_q} \right) + \left\{ \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial x_s}{\partial y_q}$.

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \right) - \frac{\partial}{\partial y_\beta} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \right) = \frac{b}{b y_\alpha} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \right) - \frac{b}{b y_\beta} \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \right) \\
 &= \frac{b_{(\alpha)A_\beta}}{b y_\alpha} {}_{(\alpha)}\lambda_i + {}_{(\alpha)}A_\beta {}_{(\alpha\beta)}C_\alpha \lambda_i - \frac{b_{(\alpha)A_\alpha}}{b y_\beta} {}_{(\alpha)}\lambda_i - {}_{(\alpha)}A_\alpha {}_{(\alpha\beta)}C_\beta \lambda_i \\
 &= \left[\frac{\partial_{(\alpha)A_\beta}}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial_{(\alpha)A_\alpha}}{\partial y_\beta} + {}_{(\beta)}A_\beta {}_{(\beta\alpha)}C_\alpha - {}_{(\beta)}A_\alpha {}_{(\beta\alpha)}C_\beta \right] {}_{(\alpha)}\lambda_i;
 \end{aligned}$$

daraus folgt wie im euklidischen Fall

$$(12) \quad \frac{\partial_{(\alpha)A_\beta}}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial_{(\alpha)A_\alpha}}{\partial y_\beta} + {}_{(\beta)}A_\beta {}_{(\beta\alpha)}C_\alpha - {}_{(\beta)}A_\alpha {}_{(\beta\alpha)}C_\beta = 0.$$

Wir definieren nun im Punkte P der F_1 die $J_{123 \dots k}$ -Räume. Es ist der J_1 der kleinste Vektorraum in P , der die Tangenten aller Flächenkurven in P enthält, der J_{12} der kleinste Vektorraum in P , der die Tangenten und ersten Normalen aller dieser Kurven enthält, usw., der $J_{123 \dots k}$ der kleinste Vektorraum in P , der die Tangenten, ersten usw. bis $k-1$ ten Normalen aller dieser Kurven enthält.¹⁾ Dann ist der J_2 als größter im J_{12} normal zum J_1 gelegener Vektorraum, der J_3 als größter im J_{123} normal zum J_{12} gelegener Vektorraum und allgemein der J_k als größter im $J_{12 \dots k}$ normal zum $J_{12 \dots k-1}$ gelegener Vektorraum definiert. Völlig analog wie im euklidischen Falle ist das (bis auf Äquivalenz bestimmte) die J_k aufspannende ν -Bein definiert. Wir ergänzen es durch ein normiertes $n - \nu$ -Bein zu einem normierten n -Bein ${}_{(\alpha)}\lambda^i$.

Nehmen wir dieses für das n -Bein (1'), so ist nach (8)

$$(13) \quad {}_{(\alpha)}A_j = 0,$$

sobald α kein Index des J_1 -Raumes ist. In den Integrabilitätsbedingungen (11) verschwindet demnach die rechte Seite, wenn α oder β ein Index des $J_2, J_3 \dots$ ist. Sei jetzt

$$(14) \quad {}_{(\alpha)}\lambda_i$$

ein Vektor des $J_\sigma, \alpha < J_\sigma$, wobei $\sigma \neq 1$ ist, dann gilt für die Tangente einer jeden in der F_1 liegenden Kurve C

$$(15) \quad {}_{(\alpha)}\lambda_i (1)\xi^i = 0.$$

Nach der Bogenlänge differenziert, ergibt (15)

$$(16) \quad \frac{b_{(\alpha)\lambda^i}}{b s} (1)\xi^i = - {}_{(\alpha)}\lambda^i \frac{(2)\xi^i}{\varrho_1} \quad (\alpha < J_\sigma, \sigma \neq 1),$$

1) Korrekter, jedoch umständlicher wäre es, den $J_{12 \dots k}$ -Raum als den durch die Vektoren $(1)\xi^i, \frac{(2)\xi^i}{\varrho_1}, \dots, \frac{(k)\xi^i}{\varrho_1 \dots \varrho_{k-1}}$ aller Kurven der F_1 durch P aufgespannten Vektorraum zu definieren. Im allgemeinen (vielleicht sogar immer) fällt diese Definition mit der obigen zusammen (vgl. die Fußnoten S. 206 und 230.)

also nach (8)

$$(16') \quad ({}_{\alpha\beta})C_j \frac{dy_j}{ds} ({}_{(1)}\xi^i ({}_{\beta})\lambda_i = - \frac{({}_{\alpha})\lambda_{i(2)}\xi^i}{\rho_1}.$$

Nun ist

$$({}_{(1)}\xi^i = \frac{dx_i}{ds} = ({}_{\gamma})A_h \frac{dy_h}{ds} ({}_{\gamma})\lambda^i,$$

also wird (16')

$$(17) \quad ({}_{\alpha\beta})C_j ({}_{\beta})A_h \frac{dy_j}{ds} \frac{dy_h}{ds} = - \frac{({}_{\alpha})\lambda_{i(2)}\xi^i}{\rho_1} \quad (\alpha \prec J_{\sigma}, \sigma \neq 1).$$

Wenn wir in (12) $\alpha \prec J_{\sigma}$, $\sigma \neq 1$, setzen, erhalten wir wegen (13)

$$(18) \quad ({}_{\alpha\beta})C_j ({}_{\beta})A_h = ({}_{\alpha\beta})C_h ({}_{\beta})A_j \quad (\alpha \prec J_{\sigma}, \sigma \neq 1).$$

Demnach sind die Tensoren

$$(19) \quad - ({}_{\alpha})A_{jh} = ({}_{\alpha\beta})C_j ({}_{\beta})A_h \quad (\alpha \prec J_{\sigma}, \sigma \neq 1)$$

symmetrisch und statt (17) gilt

$$(20) \quad ({}_{\alpha})A_{jh} \frac{dy_j}{ds} \frac{dy_h}{ds} = + \frac{({}_{\alpha})\lambda_{i(2)}\xi^i}{\rho_1} \quad (\alpha \prec J_{\sigma}, \sigma \neq 1).$$

Zufolge der Definition der J_{σ} -Räume verschwindet die rechte Seite von (20), wenn α ein Index des J_{σ} , $\sigma > 2$ ist. Wegen der Symmetrie des Tensors $({}_{\alpha})A_{jh}$ ist demzufolge

$$(21) \quad ({}_{\alpha})A_{jh} = 0,$$

wenn α ein Index des J_{σ} , $\sigma > 2$ ist. Somit existieren die $({}_{\alpha})A_{jh}$ nur für $\alpha \prec J_2$.

Die Relationen (19) sind ein System von linearen Gleichungen zur Berechnung der $({}_{\alpha\beta})C_j$ wo $\alpha \prec J_{\sigma}$, $\sigma \neq 1$, und $\beta \prec J_1$ ist. Für $\alpha \prec J_{\sigma}$, $\sigma > 2$ verschwinden in (19) die linken Seiten. Da unsere F_l in jedem Punkte einen l dimensionalen Tangentenraum J_1 hat, muß nach (8)

$$| ({}_{\beta})A_h | \neq 0$$

sein. Dann aber folgt aus (19)

$$(22) \quad ({}_{\alpha\beta})C_j = 0 \quad (\beta \prec J_1, \alpha \prec J_{\sigma}, \sigma > 2).$$

Die quadratischen Formen

$$(23) \quad ({}_{\alpha})II = ({}_{\alpha})A_{jh} \frac{dy_j}{ds} \frac{dy_h}{ds} \quad (\alpha \prec J)$$

sind linear unabhängig. Aus einer Relation

$$(24) \quad ({}_{\alpha})P ({}_{\alpha})II = 0$$

folgt nach (20)

$$(25) \quad ({}_{\alpha})P ({}_{\alpha})\lambda_{i(2)}\xi^i = 0 \quad (\alpha \prec J_2).$$

Der Vektor $(\alpha)P$ $(\alpha)\lambda_i$, $\alpha < J_2$, des J_2 wäre zu allen $(2)\xi^i$ senkrecht und müßte demnach der Nullvektor sein, d. h. es müßte $(\alpha)P = 0$ sein.¹⁾

Da es höchstens $\binom{l+1}{2}$ unabhängige Formen $(\alpha)II$ geben kann, ist die Dimension l_2 des J_2 höchstens $\binom{l+1}{2}$, und die Matrix

$$(26) \quad \|(\alpha)A_{j_h}\|$$

vom Range l_2 .

Wir haben die Linearformen und Formen zweiter Stufe völlig analog wie im euklidischen Fall definiert. Wir nehmen nun an, dies sei uns bis zu den Formen k ter Stufe einschließlich gelungen und es gelte

$$(27) \quad \frac{(\alpha)\lambda_i(\alpha)\xi^i}{\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{h-1}} = (\alpha)A_{j_1 \dots j_h} \frac{dy_{j_1}}{ds} \dots \frac{dy_{j_h}}{ds} = (\alpha)K \quad (\alpha < J_\sigma, \sigma > h-1)$$

völlig analog wie (2, 10) mit symmetrischen und linear unabhängigen $(\alpha)A_{j_1 \dots j_h}$ für alle $h \leq k$. Desgleichen sei

$$(28) \quad (\alpha)A_{j_1 \dots j_h} = (\beta \alpha)C_{j_h}(\beta)A_{j_1 \dots j_{h-1}} \quad (\alpha < J_h, \beta < J_{h-1})$$

bereits nachgewiesen, und ebenso

$$(29) \quad 0 = (\beta \alpha)C_{j_h}(\beta)A_{j_1 \dots j_{h-1}} \quad (\beta < J_{h-1}, \alpha < J_\sigma, \sigma > h).$$

Aus (29) und der linearen Unabhängigkeit der $(\beta)A_{j_1 \dots j_{h-1}}$ folgt dann

$$(30) \quad (\beta \alpha)C_j = 0 \quad (\beta < J_{h-1}, \alpha < J_\sigma, \sigma > h).$$

Den Rang der Matrix

$$(31) \quad \|(\alpha)A_{j_1 \dots j_h}\|,$$

der gleich der Dimension des J_h ist, bezeichnen wir mit l_h .

Für $k=2$ sind die obigen Voraussetzungen erfüllt. Wir beweisen dann, daß auch für $h=k+1$ die Relationen (27) bis (30) gelten. Sei $(\alpha)\lambda_i$ ein Vektor des J_σ , $\sigma > k$, so gilt²⁾

$$(32) \quad (\alpha)\lambda_i(\alpha)\xi^i = 0.$$

1) Eigentlich folgt, daß $(\alpha)P$ $(\alpha)\lambda_i$ auf allen Vektoren $\frac{(2)\xi^i}{\varrho_1}$ normal steht. Das gibt eine Schwierigkeit, der man am besten ausweicht, wenn man den $J_{1,2}$ als den durch die Vektoren $(1)\xi^i$ und $\frac{(2)\xi^i}{\varrho_1}$ aufgespannten Vektorraum definiert.

$$2) \text{ Definiert man } J_{1,2} \dots k \equiv \left\{ (1)\xi^i, \frac{(2)\xi^i}{\varrho_1}, \dots, \frac{(k)\xi^i}{\varrho_1 \dots \varrho_{k-1}} \right\},$$

so tritt an Stelle von (32)

$$\frac{(\alpha)\lambda_i(\alpha)\xi^i}{\varrho_1 \dots \varrho_{k-1}} = 0.$$

An den weiteren Resultaten ändert das nichts, wie man sich bei einfacher Modifikation der Schlüsse leicht überlegt.

Durch Differentiation nach s folgt daraus

$$(33) \quad \frac{\partial (\alpha) \lambda_i}{\partial s} (\kappa) \xi^i = - (\alpha) \lambda_i \left[- \frac{(\kappa-1) \xi^i}{\varrho_{\kappa-1}} + \frac{(\kappa+1) \xi^i}{\varrho_{\kappa}} \right] = - \frac{(\alpha) \lambda_i (\kappa+1) \xi^i}{\varrho_{\kappa}} \quad (\alpha \prec J_{\sigma}, \sigma > \kappa).$$

Nach (3) ist

$$(34) \quad \frac{\partial (\alpha) \lambda_i}{\partial s} (\kappa) \xi^i = (\alpha \beta) C_r \frac{d y_r}{d s} (\beta) \lambda_i (\kappa) \xi^i.$$

Da $\alpha \prec J_{\sigma}$, $\sigma > \kappa$ ist, durchläuft β in (34) wegen (30) die Indizes des J_{κ} , $J_{\kappa+1}$, $J_{\kappa+2}$, ..., usw.

Wir können daher (27) benutzen und erhalten weiter

$$(35) \quad \frac{\partial (\alpha) \lambda_i}{\partial s} \frac{(\kappa) \xi^i}{\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{\kappa-1}} = (\alpha \beta) C_r \frac{d y_r}{d s} (\beta) A_{j_1 \dots j_{\kappa-1}} \frac{d y_{j_1}}{d s} \dots \frac{d y_{j_{\kappa-1}}}{d s} \quad (\alpha \prec J_{\sigma}, \sigma > \kappa).$$

Wir setzen

$$(36) \quad (\beta) A_{j_1 \dots j_{\kappa-1}} (\beta \alpha) C_{j_{\kappa+1}} = (\alpha) A_{j_1 \dots j_{\kappa-1}} j_{\kappa+1}$$

und beweisen die Symmetrie dieses Tensors $\kappa + 1$ ter Stufe mit Benutzung der Integrabilitätsbedingung (11) für $\alpha \prec J_{\kappa-1}$, $\beta \prec J_{\sigma}$, $\sigma > \kappa$. Diese Relation lautet

$$(37) \quad (\alpha \gamma) C_h (\gamma \beta) C_r - (\alpha \gamma) C_r (\gamma \beta) C_h = 0 \quad (\alpha \prec J_{\kappa-1}, \beta \prec J_{\sigma}, \sigma > \kappa).$$

Durch Überschiebung von (37) mit $(\alpha) A_{j_1 \dots j_{\kappa-1}}$ folgt wegen (28)

$$(38) \quad (\gamma) A_{j_1 \dots j_{\kappa-1}} h (\gamma \beta) C_r = (\gamma) A_{j_1 \dots j_{\kappa-1}} r (\gamma \beta) C_h$$

oder

$$(38') \quad (\beta) A_{j_1 \dots j_{\kappa-1}} h r = (\beta) A_{j_1 \dots j_{\kappa-1}} r h.$$

Da der Tensor (36) in den κ ersten Indizes symmetrisch ist, so ist er nach (38') überhaupt symmetrisch. Nach (33), (35) und (36) gilt

$$(39) \quad \frac{(\alpha) \lambda_i (\kappa+1) \xi^i}{\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{\kappa}} = (\alpha) A_{j_1 \dots j_{\kappa+1}} \frac{d y_{j_1}}{d s} \dots \frac{d y_{j_{\kappa+1}}}{d s} \quad (\alpha \prec J_{\sigma}, \sigma > \kappa).$$

Für $\alpha \prec J_{\kappa+2}$, $J_{\kappa+3}$, ... verschwindet die linke Seite, also auch $(\alpha) A_{j_1 \dots j_{\kappa+1}}$, welcher Tensor somit nur für $\alpha \prec J_{\kappa+1}$ nicht verschwindet. Daraus und aus der linearen Unabhängigkeit der Tensoren $(\beta) A_{j_1 \dots j_{\kappa}}$ folgt nach (36) die Gültigkeit der Relation (30) für $\beta \prec J_{\kappa}$, $\alpha \prec J_{\sigma}$, $\sigma > \kappa + 1$.

Die Unabhängigkeit der Tensoren $(\alpha) A_{j_1 \dots j_{\kappa+1}}$, $\alpha \prec J_{\kappa+1}$, beweist man analog (24) und (25).

Wir konnten somit, und zwar völlig analog wie im euklidischen Fall die symmetrischen Tensoren $(\alpha) A_{j_1 \dots j_i}$, $\alpha \prec J_i$, der F_i definieren; für sie, bzw. für die Vektoren $(\alpha \beta) C_p$ gelten die wichtigen Relationen (3, 3), (3, 5) und (3, 8).

Wir können nun im System totaler Differentialgleichungen

$$(40) \quad \begin{cases} dx_i = (\alpha) A_j (\alpha) \lambda^i dy_j, \\ d(\alpha) \lambda^i = \left[- \left\{ \begin{matrix} p & q \\ i & \end{matrix} \right\} (\alpha) \lambda^p (\beta) \lambda^q (\beta) A_j + (\alpha \beta) C_j (\beta) \lambda^i \right] dy_j \end{cases}$$

aus den Formen $(\alpha)A_{j_1 \dots j_i}$ der F_i mittels der Relationen (3, 3), (3, 5), (3, 8) und den Integrabilitätsbedingungen (11), (12) von (40) die Koeffizientenvektoren $(\alpha\beta)C_j$, und zwar völlig analog wie im euklidischen Fall berechnen. Denn alle zur Berechnung hier aufgezählten Relationen sind für diesen wie für den euklidischen Fall identisch bis auf die eine (11) für $\alpha, \beta < J_1$. Aber diese tritt nur als Bedingungsgleichung für die Tensoren $(\alpha)A_{p_1}$, $(\alpha)A_{p_1 p_2}$ auf und ist die bekannte GAUSSsche Krümmungsgleichung.

An Stelle von $(\alpha)A_j(\beta)A_h(\alpha\beta)X_{p_q} = 0$ im euklidischen Fall besteht hier

$$(41) \quad (\alpha)A_j(\beta)A_h[(\alpha\beta)X_{p_q} - \varrho((\alpha)A_p(\beta)A_q - (\alpha)A_q(\beta)A_p))] = 0,$$

oder, wenn man den Maßtensor

$$(42) \quad \gamma_{ja} = (\alpha)A_j(\alpha)A_a$$

der F_i einführt,

$$(43) \quad (\alpha)A_j(\beta)A_h(\alpha\beta)X_{p_q} = \varrho(\gamma_{jp}\gamma_{hq} - \gamma_{ja}\gamma_{hp}).$$

Alle weiteren Schlüsse, die völlig analog wie im euklidischen Fall verlaufen, seien dem Leser überlassen. Es ist vor allem zu zeigen, daß bei einer Anfangslage $x_i^0, (\alpha)\lambda_i^0, ((\alpha)\lambda_i^0(\beta)\lambda_i^0 = \delta_{\alpha\beta})$ ein Lösungssystem von (40) eine F_i mit dem gegebenen Formensystem definiert. Aber auch diese Überlegung ist von der entsprechenden, für den euklidischen R_n geführten nicht verschieden. Aus (27) folgt

$$(44) \quad \frac{(\alpha)\lambda_i(\beta)\xi_i^j \cdot ((\alpha)\lambda_i^j(\beta)\xi_i^j)}{(\varrho_1\varrho_2 \dots \varrho_{n-1})^2} = \frac{\delta_{ij}^j(\beta)\xi_i^j(\beta)\xi_i^j}{(\varrho_1 \dots \varrho_{n-1})^2} = \frac{(\beta)\xi_i^j(\beta)\xi_i^j}{(\varrho_1 \dots \varrho_{n-1})^2} \\ = (\alpha)A_{j_1 \dots j_h}(\alpha)A_{i_1 \dots i_h} \frac{dy_{j_1}}{ds} \dots \frac{dy_{j_h}}{ds} \frac{dy_{i_1}}{ds} \dots \frac{dy_{i_h}}{ds}$$

als Definitionsgleichung der Formenquadrate, die — wie im euklidischen — die F_i bis auf ihre Lage im Raum (Kongruenz) bestimmen.

Anhang.

I. Die Erweiterung des Satzes von Meusnier für die F_l des euklidischen R_n .

Wir werden im folgenden mehr skizzieren und auf Details nicht eingehen. Zugrunde liegt eine F_l

$$(1) \quad x_i = x_i(y_1, \dots, y_l)$$

des auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen euklidischen R_n .

Den Normalenraum $N_{(n-l)}$ denken wir uns in jedem Punkte der F_l durch das normierte $n-l$ -Bein

$$(2) \quad (a)\lambda_i \quad (\alpha = 1, \dots, n-l)$$

aufgespannt. Ist dann

$$(3) \quad y_p = y_p(s) \quad (p=1, \dots, l)$$

eine auf die Bogenlänge bezogene Kurve C der F_l und $(1)\xi_i = \frac{dx_i}{ds}$ ihre Tangente.

so gilt längs C

$$(4) \quad (a)\lambda_i (1)\xi_i = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n-l)$$

Durch Differentiation von (4) nach s ergibt sich

$$(5) \quad \frac{d_{(a)}\lambda_i}{ds} (1)\xi_i = - (a)\lambda_i \frac{(2)\xi_i}{\rho_i}.$$

Nun ist $\frac{d_{(a)}\lambda_i}{ds} = \frac{\partial_{(a)}\lambda_i}{\partial x_k} (1)\xi_k$ nur vom Punkte x_k und der Tangentenrichtung $(1)\xi_k$ der Kurve in P abhängig. Also folgt aus (5):

Alle Kurven der F_l , deren Tangenten und erste Normalen in einem Punkte P übereinstimmen, haben in P dieselbe erste Krümmung.

Durch Überschiebung von (5) mit $(a)\lambda_k$ folgt

$$(6) \quad (a)\lambda_k \frac{d_{(a)}\lambda_i}{ds} (1)\xi_i = - \frac{1}{\rho_i} (2)\xi_k,$$

wo

$$(6') \quad (2)\xi_k = (a)\lambda_k (a)\lambda_i (2)\xi_i$$

der Projektionsvektor von $(2)\xi_i$ in den Normalenraum $N_{(n-l)}$ ist. Aus (6) folgt: *Der Projektionsvektor der ersten Normalen aller Kurven der gleichen Tangente in den Normalraum $N_{(n-l)}$ der F_l hat für alle diese Kurven die gleiche Richtung.*

Den Schnitt der F_l mit der durch $(1)\xi_i$ und $N_{(n-l)}$ (also durch Tangente und Normalraum in P) aufgespannten E_{n-l+1} bezeichnen wir als *Normal-*

schnitt I . Diese E_{n-l+1} ist durch $l-1$ Gleichungen, die F_l durch $n-l$ Gleichungen zwischen den Koordinaten x_1, \dots, x_n angebar, der Schnitt also durch $n-l+l-1 = n-1$ Gleichungen. Der Normalschnitt I ist also eine Kurve der F_l .

Mit $(1)\Xi_i^{(1)}$, $(2)\Xi_i^{(1)}$ usw. bezeichnen wir das begleitende Bein des Normalschnittes I ; in P gilt dann

$$(7) \quad (1)\Xi_i^{(1)} = (1)\xi_i.$$

Ist nämlich $(\beta)\nu_i$ das normierte, den Normalenraum der E_{n-l+1} aufspannende $l-1$ -Bein, so gilt in P

$$(8) \quad (\beta)\nu_i (1)\xi_i = 0, \quad (\beta)\nu_i (\alpha)\lambda_i = 0 \quad (\alpha=1, \dots, n-l, \beta=1, \dots, l-1).$$

Nun ist $(1)\xi_i$ in P durch die $n-1$ linear unabhängigen Gleichungen

$$(9) \quad (\beta)\nu_i (1)\xi_i = 0 \quad (\beta=1, \dots, l-1), \quad (\alpha)\lambda_i (1)\xi_i = 0 \quad (\alpha=1, \dots, n-l)$$

völlig bestimmt. Da aber $(1)\Xi_i^{(1)}$ in P als Tangente der im E_{n-l+1} liegenden Kurve der F_l den Gleichungen (9) ebenfalls genügen muß, so folgt die Beziehung (7) in P .

Der Vektor $(2)\Xi_i^{(1)}(P)$ liegt in der $E_{n-l+1} \{ (1)\xi_i(P), N_{(n-l)}(P) \}$, und da er senkrecht zu $(1)\Xi_i^{(1)}(P) = (1)\xi_i(P)$ ist, muß er im Normalenvektorraum $N_{(n-l)}(P)$ enthalten sein. Bezeichnet $\frac{1}{P_1}$ die erste Krümmung des Normalschnittes in P , so gilt nach (6)

$$(10) \quad \frac{1}{P_1} (2)\Xi_k^{(1)} = \frac{1}{\varrho_1} (2)\xi_k.$$

Überschiebung mit $(2)\Xi_k^{(1)}$ ergibt endlich

$$(11) \quad \varrho_1 = P_1 (2)\Xi_k^{(1)} (2)\xi_k = P_1 \cos (2)\Xi^{(1)}, (2)\xi),$$

da $(2)\Xi_k^{(1)} (2)\xi_k = (2)\Xi_k^{(1)} (2)\xi_k$ ist.

Die Relation (11) stellt den Satz von MEUSNIER dar, sie gilt in jedem Riemannschen R_n , nur tritt an Stelle der im allgemeinen nicht existierenden E_{n-l+1} eine in P durch $(1)\xi_i$, $N_{(n-l)}$ aufgespannte, in P geodätische F_{n-l+1} . Wir wollen nur kurz zeigen, daß dieser nach MEUSNIER benannte Satz im euklidischen R_n (und ebenso im R_n konstanter Krümmung) das erste Glied einer Kette ähnlicher Sätze ist.

Wir sahen, daß die Projektion der ersten Normalen der Kurve (3) in den Normalenraum $N_{(n-l)}$ in eine Richtung des $N_{(n-l)}$ fällt, die nur von der Tangente $(1)\xi_i$ im betreffenden Punkte der Kurve abhängt. Wir werden diese Richtung $(2)\Xi_i^{(1)}$ als den $n-l$ -ten Vektor des den $N_{(n-l)}$ aufspannenden normierten $n-l$ -Beins wählen:

$$(12) \quad (n-l)\lambda_i = (2)\Xi_i^{(1)}.$$

Der größte, auf $(2)\mathfrak{E}_i^{(1)}$ normale Vektorunterraum $N_{(n-l-1)}$ von $N_{(n-l)}$ wird durch das normierte $n-l-1$ -Bein

$$(13) \quad (a)\lambda_i \quad (\alpha=1, \dots, n-l-1)$$

aufgespannt. Jeder Vektor des normierten $n-l-1$ -Beins (13) ist dann normal auf die erste Normale jeder C im betrachteten Punkte tangierenden Kurve. Insbesondere gilt längs C

$$(14) \quad (a)\lambda_i (2)\xi_i = 0 \quad (\alpha=1, \dots, n-l-1).$$

Der Vektorraum $N_{(n-l-1)}$ ist in jedem Punkte der Kurve (3) durch die Richtung $(1)\xi_i$, also durch $x_i, (1)\xi_i$, völlig bestimmt, das gleiche gilt dann vom normierten $n-l-1$ -Bein (13). Differentiation von (14) nach s ergibt

$$(15) \quad \frac{d_{(a)}\lambda_i}{ds} (2)\xi_i = - \frac{(a)\lambda_i (3)\xi_i}{\varrho_2} \quad (\alpha=1, \dots, n-l-1).$$

Da $(a)\lambda_i$ nur von $x_i, (1)\xi_i$ abhängt, so ist $\frac{d_{(a)}\lambda_i}{ds}$ durch $x_i, (1)\xi_i$ und $\frac{(3)\xi_i}{\varrho_1}$ bestimmt.

Nun ist $\frac{1}{\varrho_1}$ selbst durch $(1)\xi_i$ und $(2)\xi_i$ gegeben, demnach $\frac{d_{(a)}\lambda_i}{ds}$ durch $x_i, (1)\xi_i$ und $(2)\xi_i$. Somit entnehmen wir aus (15):

Alle Kurven der F_i , die in einem Punkte P gleiche Tangente, erste und zweite Normale besitzen, haben daselbst die gleiche zweite Krümmung.

Überschiebung von (15) mit $(a)\lambda_k$ ergibt

$$(16) \quad (a)\lambda_k \frac{d_{(a)}\lambda_i}{ds} (2)\xi_i = - \frac{1}{\varrho_2} (3)\xi_k,$$

wo $(3)\xi_k$ die Projektion von $(3)\xi_k$ in den $N_{(n-l-1)}$ ist. Daraus folgt:

Der Projektionsvektor der zweiten Normalen aller Kurven gleicher Tangente und gleicher erster Normale in einem Punkte P der F_i in den $N_{(n-l-1)}$ Vektorraum hat für alle diese Kurven die gleiche Richtung.

Wir schneiden die F_i mit der in P durch $(1)\xi_i, (2)\xi_i$ und den $N_{(n-l-1)}$ aufgespannten $E_{n-l+1} \{ (1)\xi_i, (2)\xi_i, N_{(n-l-1)} \}$, die Schnittkurve heiße — obwohl sie kein eigentlicher Normalschnitt ist — *Normalschnitt II*. Wenn wir mit $(1)\mathfrak{E}_i^{(2)}, (2)\mathfrak{E}_i^{(2)}, (3)\mathfrak{E}_i^{(2)}, \dots$, das begleitende Bein dieser Schnittkurve bezeichnen, so gilt im betrachteten Punkt P

$$(17) \quad (1)\mathfrak{E}_i^{(2)} = (1)\xi_i, \quad (2)\mathfrak{E}_i^{(2)} = (2)\xi_i.$$

Ist nämlich $(\beta)\nu_i$ das den Normalenvektorraum der eben definierten E_{n-l+1} aufspannende, normierte $l-1$ -Bein, so gilt in P

$$(18) \quad (\beta)\nu_i (1)\xi_i = 0, \quad (\beta)\nu_i (2)\xi_i = 0, \quad (\beta)\nu_i (a)\lambda_i = 0 \quad (\alpha=1, \dots, n-l-1; \beta=1, \dots, l-1).$$

Nun genügt $(1)\xi_i(P)$ den Gleichungen

$$(19) \quad \begin{cases} (1)\xi_i(P) \quad (a)\lambda_i(P) = 0 & (\alpha=1, \dots, n-l), \\ (1)\xi_i(P) \quad (\beta)\nu_i(P) = 0 & (\beta=1, \dots, l-1) \end{cases}$$

Durch das System (19) ist, falls von gewissen Ausnahmskurven abgesehen wird, der Einheitsvektor $(1)\xi_i(P)$ bestimmt. Aus einer Abhängigkeit der Vektoren $(a)\lambda_i(P)$ ($\alpha=1, \dots, n-l$) und $(\beta)\nu_i(P)$ ($\beta=1, \dots, l-1$), also aus

$$(20) \quad (a)R \quad (a)\lambda_i(P) = (\beta)T \quad (\beta)\nu_i(P) \quad (\alpha=1, \dots, n-l; \beta=1, \dots, l-1)$$

folgt, da $(a)\lambda_i(P) \quad (\beta)\nu_i(P) = 0$ ist, für $\alpha=1, \dots, n-l-1$

$$(21) \quad (a)R = 0 \quad (\alpha=1, \dots, n-l-1).$$

Somit ist

$$(22) \quad (n-l)\lambda_i(P) = (2)\Xi_i^{(2)}(P) = (\beta)\bar{T} \quad (\beta)\nu_i(P) \quad (\beta=1, \dots, l-1)$$

eine Folge von (20), wenn (20) nicht identisch befriedigt ist. Da weiter $(\beta)\nu_i(P) \quad (2)\xi_i(P) = 0$ gilt, ist dann

$$(23) \quad (2)\Xi_i^{(2)}(P) \quad (2)\xi_i(P) = 0,$$

d. h. für die betrachtete Kurve gibt es in P keine Projektion der zweiten Normalen $(2)\xi_i$ in den Normalenraum der F_i . Wir müssen solche Kurven (Asymptotenkurven) von der weiteren Betrachtung ausschließen, dann aber bestimmt das System (19) den Vektor $(1)\xi_i(P)$ völlig. Da aber auch $(1)\Xi_i^{(2)}(P)$ dem Systeme genügt, gilt

$$(1)\Xi_i^{(2)}(P) = (1)\xi_i(P).$$

Die zweite Normale $(2)\xi_i$ von C in P befriedigt die Gleichungen

$$(24) \quad \begin{cases} (\beta)\nu_i(P) \quad (2)\xi_i(P) = 0 & (\beta=1, \dots, l-1), \\ (a)\lambda_i(P) \quad (2)\xi_i(P) = 0 & (\alpha=1, \dots, n-l-1), \\ (1)\xi_i(P) \quad (2)\xi_i(P) = 0. \end{cases}$$

Die Vektoren $(\beta)\nu_i(P)$, $(a)\lambda_i(P)$ und $(1)\xi_i(P)$ in (24) sind zu je zweien normal, demnach sind die Relationen (24) linear unabhängig und bestimmen $(2)\xi_i(P)$ völlig. Da $(2)\Xi_i^{(2)}(P)$ auch diesen Relationen genügt, gilt

$$(2)\Xi_i^{(2)}(P) = (2)\xi_i(P),$$

w. z. b. w. Wenn wir die der Relation (16) analoge für den Normalschnitt II anschreiben, so folgt aus ihr, (16) und (17),

$$(25) \quad \frac{1}{\varrho_2} \quad (3)\xi_i(P) = \frac{1}{P_2} \quad (3)\Xi_i^{(2)}(P),$$

wo $\frac{1}{P_2}$ die zweite Krümmung des Normalschnittes II in P bezeichnet.

Nun liegt $(3)\mathfrak{E}_i^{(2)}$ in der $E_{n-l+1} \{ (1)\xi(P), (2)\xi(P), N_{(n-l-1)}(P) \}$, und da dieser Vektor außerdem auf $(1)\xi_i(P)$ und $(2)\xi_i(P)$ wegen (17) normal steht, so liegt er in $N_{(n-l-1)}$, d. h. es ist

$$(3)\mathfrak{E}_i^{(2)} = (3)\mathfrak{E}_i^{(3)}.$$

Dann aber folgt aus (25) durch Überschiebung mit $(3)\mathfrak{E}_i^{(2)}(P)$

$$(26) \quad \varrho_2 = P_2 \cos \langle (3)\mathfrak{E}^{(2)}, (3)\xi \rangle,$$

der MEUSNIERSche Satz für die zweite Krümmung.

Wir glauben im vorhergehenden den Beweisgang hinreichend charakterisiert zu haben und überlassen es dem Leser, die entsprechenden Schlüsse, die dritten und weiteren Krümmungen betreffend, zu ziehen.

II. Der Gaußsche Integralsatz im Riemannschen R_n .

Ist λ^i ein in einem Gebiete G des R_n stetig differenzierbarer Vektor, so versteht man unter seiner Divergenz den Skalar

$$(1) \quad \operatorname{div} \lambda = \frac{\partial \lambda^i}{\partial x_i} = \frac{\partial \lambda^i}{\partial x_i} + \left\{ \begin{matrix} p^i \\ i \end{matrix} \right\} \lambda^p.$$

Nun ist

$$(1') \quad \left\{ \begin{matrix} p^i \\ i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_p}.$$

Bezeichnen wir mit g die (positive) Determinante der g_{ik} , so gilt

$$(2) \quad \frac{\partial g}{\partial x_p} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_p}.$$

Aber wegen $\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} g_{ij} = \delta_{ij}$, g ist $\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = g \cdot g^{ij}$,

also

$$(2') \quad \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_p} = g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_p}.$$

Damit wird (1)

$$(3) \quad \operatorname{div} \lambda = \frac{\partial \lambda^i}{\partial x_i} + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x_i} \lambda^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} \lambda^i}{\partial x_i}.$$

Wir bilden den R_n ein-eindeutig auf ein Gebiet eines auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen euklidischen R_n ab, indem wir die Punkte mit gleichen Koordinaten einander entsprechen lassen. Sei dann

$$(4) \quad \Phi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

die Gleichung einer geschlossenen F_{n-1} , die das euklidische Abbild des R_n in zwei zusammenhängende Gebiete, ein Innengebiet G und das entsprechende Außengebiet teile. G liege dabei ganz im Endlichen. Die durch (4) definierte Punktmenge F_{n-1} habe mit jeder Geraden, die einer der x_i -Achsen

parallel ist, eine endliche Zahl von Schnittpunkten. Weiter sei die Funktion Φ in einer Umgebung eines jeden Punktes P der F_{n-1} so definiert, daß ihr Wert negativ in den Punkten des Gebietes G und positiv in den Punkten des Außengebietes sei. Die Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ existiere im ganzen Definitionsgebiet der Funktion Φ (die F_{n-1} und Umgebung) und sei daselbst stetig.

Wir sagen dann, ein Vektor ϱ^i eines Punktes P der F_{n-1} sei *ins Außengebiet gerichtet*, wenn

$$(5) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \varrho^i > 0$$

ist. Wir betrachten nun im R_n das über G erstreckte n -fache Integral

$$(6) \quad \int \sqrt{g} \operatorname{div} \lambda \, dx_1 \dots dx_n = \int \frac{\partial \sqrt{g} \lambda^i}{\partial x_i} \, dx_1 \dots dx_n,$$

dessen i ten Summanden (über i jetzt nicht summiert)

$$(7) \quad \int \frac{\partial \sqrt{g} \lambda^i}{\partial x_i} \, dx_i \, dx_1 \dots dx_{i-1} \, dx_{i+1} \dots dx_n$$

wir nach x_i integrieren. Wir erhalten dafür

$$(8) \quad \int \pm \sqrt{g} \lambda^i \, dx_1 \dots dx_{i-1} \, dx_{i+1} \dots dx_n,$$

wo $+$ an den Austrittsstellen und $-$ an den Eintrittsstellen der Integration zu nehmen ist.

Nun sei auf der F_{n-1} ein Parametersystem $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ gegeben und

$$(9) \quad \gamma_{pq} = g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial \sigma_p} \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_q} \quad (i, k = 1, \dots, n; p, q = 1, \dots, n-1)$$

der Maßtensor in diesen Parametern.¹⁾ Bezeichnen wir mit Φ_i die in das Außengebiet gerichtete normierte Normale in einem Punkte P der F_{n-1} , so ist

$$(10) \quad \Phi_i = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}{\sqrt{g^{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}}},$$

wo nach (5) die positive Wurzel zu nehmen ist. Dann gilt

$$(11) \quad |g_{ik}| \cdot \left| \begin{array}{cccc} \Phi^1 & \Phi^2 & \dots & \Phi^n \\ \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \sigma_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_{n-1}} \end{array} \right|^2 = |\gamma_{pq}|,$$

1) Wir beachten dabei nur die Umgebung eines Punktes der F_{n-1} .

wo $|g_{ik}|$ die Determinante der g_{ik} , $|\gamma_{p\alpha}|$ die der $\gamma_{p\alpha}$ bedeutet. Nun ist Φ_i proportional dem algebraischen Komplement $[\Phi^i]$ von Φ^i in

$$\begin{vmatrix} \Phi^1 & \Phi^2 & \dots & \Phi^n \\ \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \sigma_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_{n-1}} \end{vmatrix},$$

d. h. es ist $\Phi_i = \alpha [\Phi^i]$.¹⁾ Nach (11) erhalten wir für $\alpha : \alpha^{-2} |g_{ik}| (\Phi^i \Phi_i)^2 = |\gamma_{p\alpha}|$, also gilt

$$(12) \quad \Phi_1 = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial x_2}{\partial \sigma_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_{n-1}} \end{vmatrix} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}, \quad \Phi_2 = \mp \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_{n-1}} & \frac{\partial x_3}{\partial \sigma_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_{n-1}} \end{vmatrix} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}, \dots,$$

die auftretenden Wurzeln positiv genommen.

Wir betrachten insbesondere

$$(13) \quad \Phi_i = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial x_{i-1}}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial x_{i+1}}{\partial \sigma_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_{i-1}}{\partial \sigma_{n-1}} & \frac{\partial x_{i+1}}{\partial \sigma_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_{n-1}} \end{vmatrix} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}$$

in einem Punkte P der F_{n-1} . Wir nehmen an, die in (13) rechts stehende Determinante sei positiv. Dann ist in (13) das Zeichen $+$ oder $-$ zu setzen, je nachdem P bei der Integration nach x_i Austritts- oder Eintrittsstelle war. Denn nach (10) hat Φ_i dasselbe Vorzeichen wie $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$, Φ aber wächst an den Austrittsstellen und nimmt ab an den Eintrittsstellen einer Kurve in das Gebiet G .

Für die Parameter

$$(14) \quad x_1 = \sigma_1, \dots, x_{i-1} = \sigma_{i-1}, x_{i+1} = \sigma_i, x_{i+2} = \sigma_{i+1}, \dots, x_n = \sigma_{n-1}$$

ist die Determinante (13) rechts gleich eins, also gilt

$$(15) \quad \Phi_i = \pm \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}},$$

wo $+$ an den Austritts-, $-$ an den Eintrittsstellen zu setzen ist. Damit ist (8) gleich

$$(16) \quad \int \lambda^i \Phi_i \sqrt{\gamma} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n = \int \lambda^i \Phi_i dO \quad (\text{nicht summieren über } i!),$$

1) Denn es ist $[\Phi^i] \frac{\partial x_i}{\partial \sigma_p} = 0$ ($p = 1, \dots, n-1$). (Zwei Zeilen einer Determinante sind gleich.)

wo dO das invariante Oberflächenelement der F_{n-1} bedeutet. Aus (6) folgt also (wieder summieren über i)

$$(17) \quad \int_G \operatorname{div} \lambda \, dv = \int \Phi_i \lambda^i \, dO,$$

wo dv das invariante Volumenelement von G , und Φ_i , um zu erinnern, die *ins Außengebiet von G gerichtete* Normale der Begrenzung F_{n-1} von G ist. Die Relation (17) heißt die *Integralformel von Gauß*.

III. Der Tensorkalkül in der klassischen Mechanik.

Es handelt sich im folgenden nur um ein Anwendungsbeispiel; wir wählen dafür die *Eulerschen Kreiselgleichungen*.

Legen wir der Betrachtung Koordinatensysteme S zugrunde, die untereinander durch die Transformationen der Gruppe

$$(G) \quad \begin{cases} \bar{x}_i = a_{ik}(t) x_k \\ \bar{t} = t \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

zusammenhängen, in der die Matrix der $a_{ik}(t)$ orthogonal ist, so entspricht der Eigenart der Gruppe (G) ein besonderer Tensorkalkül. Die vierte Koordinate $x_4 = t$ ist nach (G) eine Invariante, ein Skalar: die Zeit t .

Die Transformationsgesetze der Komponenten des kontravarianten Vektors $x_1, x_2, x_3, x_4; \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4$ lauten

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{\lambda}^i = a_{ik}(t) \lambda^k + a'_{ik}(t) x_k \lambda^4 \\ \bar{\lambda}^4 = \lambda^4. \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

Aus ihnen schließen wir:

a) $x_1, x_2, x_3, 0$ ist das Komponentensystem eines kontravarianten Vektors, der mit ξ^i bezeichnet sei: $\xi^i = x_i$ ($i = 1, 2, 3$), $\xi^4 = 0$.

b) Verschwinden in einem unserer Koordinatensysteme die Komponenten des kontravarianten Tensors $T^{ij\dots}$, bei denen mindestens ein Index gleich 4 ist, so verschwinden diese Komponenten in jedem unserer Koordinatensysteme. Einen kontravarianten Tensor mit dieser Eigenschaft wollen wir *raumartig* nennen. Die nicht verschwindenden Komponenten eines raumartigen kontravarianten Tensors genügen den Transformationsgesetzen

$$(1') \quad \bar{T}^{ij\dots} = a_{ip}(t) a_{jq}(t) \dots T^{pq\dots} \quad (i, j, p, q \dots = 1, 2, 3).$$

Daraus folgt:

c) Man kann vom raumartigen kontravarianten Tensor $T^{ij\dots}$ „der Hyperebene t “ sprechen. Das heißt: das Komponentensystem eines raumartigen

kontravarianten Tensors eines Punktes $P(x_1, x_2, x_3, t)$ der Hyperebene $x_4 = t$ ist das Komponentensystem eines raumartigen kontravarianten Tensors in irgendeinem beliebigen Punkte Q dieser Hyperebene. Infolge dieser Bemerkung gilt weiter:

d) Man kann raumartige kontravariante Tensoren der Hyperebene t addieren.

Die Bemerkungen a) bis d) genügen zur Herleitung der EULERSCHEN Kreiselgleichungen.

In der von uns betrachteten Gesamtheit von Koordinatensystemen sei ein Inertialsystem enthalten, und zwar sei dieses das System $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t$. Mit g_{ik} bezeichnen wir den kovarianten Tensor, dessen Komponenten im Inertialsysteme $\bar{g}_{ik} = \delta_{ik}$ sind. Er sei der Maßtensor unseres R_4 . Ein mit einem Koordinatensysteme S , z. B. x_1, x_2, x_3, t , starr verbundenes System von Massenpunkten heißt ein Kreisel, der Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ dieses Koordinatensystemes sein Drehzentrum.¹⁾

Bilden wir zur „Zeit t “ die Tensorsumme (über alle Massenpunkte des Systems)

$$(2) \quad U^{ik} = \sum m \left(\xi^i \frac{\delta^2 x_k}{\delta t^2} - \xi^k \frac{\delta^2 x_i}{\delta t^2} \right) \quad (i, k = 1, \dots, 4),$$

so stellt sie als Summe von Produkten raumartiger Vektoren der Hyperebene t einen raumartigen kontravarianten Tensor dieser Hyperebene dar. Wirken auf den Kreisel nur innere, und zwar zentrale Kräfte, so verschwindet U^{ik} , da dies im Inertialsystem gilt.

Im System x_1, x_2, x_3, t , das mit dem Kreisel starr verbunden ist, gilt $\delta x_i = \delta^2 x_i = \dots = 0$ ($i = 1, 2, 3$), also lauten die Gleichungen $U^{ik} = 0$ in diesem System

$$(3) \quad 0 = \sum m \left(\xi^i \left\{ \begin{matrix} 4 & 4 \\ & k \end{matrix} \right\} - \xi^k \left\{ \begin{matrix} 4 & 4 \\ & i \end{matrix} \right\} \right) \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Diese Gleichungen sind bereits die Eulerschen Kreiselgleichungen; wir erhalten sie mittels weniger Umformungen in der bekannten Gestalt. Zu diesem Zwecke sind die Klammern $\left\{ \begin{matrix} 4 & 4 \\ & k \end{matrix} \right\}$ zu berechnen. Da im Inertialsystem $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{t}$

$$(4) \quad \begin{cases} \bar{x}_i = a_i \bar{t} + b_i \\ \bar{x}_4 = \bar{t} \end{cases}$$

die allgemeinste Lösung des Systems $\frac{\delta^2 \bar{x}_i}{\delta \bar{t}^2} = 0$ ist, so ist im System x_1, x_2, x_3, t (das mit diesem Inertialsystem durch die angeschriebene Transformation der Gruppe G verknüpft ist)

1) „Starr verbunden“ besagt, daß im betreffenden Koordinatensystem die drei ersten Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines jeden Massenpunktes von t unabhängig sind.

$$(4) \quad \begin{cases} a_{ik}(t) x_k(t) = a_i t + b_i \\ x_k = t \end{cases}$$

die allgemeinste Lösung von $\frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0$. Aus (4') folgt

$$(5) \quad a_i = a'_{ik} x_k + a_{ik} x'_k, \quad 0 = a''_{ik} x_k + 2a'_{ik} x'_k + a_{ik} x''_k.$$

Da $a_{ik} a_{ij} = \delta_{kj}$ ist, erhalten wir durch Überschiebung mit a_{ij} daraus

$$(6) \quad \begin{cases} x_j'' + 2a_{ij} a'_{ik} x'_k + a_{ij} a''_{ik} x_k = 0 \\ t'' = 0, \end{cases}$$

und diese Gleichungen müssen mit $\frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0$ identisch sein. Wir haben somit

$$(7) \quad \begin{Bmatrix} 4 & 4 \\ & j \end{Bmatrix} = a_{ij} a''_{ik} x_k$$

und statt (3)

$$(8) \quad \sum m \xi^i \xi^l a_{hk} a''_{hl} - \sum m \xi^k \xi^l a_{hl} a''_{ki} = 0 \quad (i, l, h, k = 1, 2, 3).$$

Führen wir den raumartigen Tensor $T^{ii} = \sum m \xi^i \xi^i$ ein, so können wir statt (8)

$$(9) \quad T^{ii} a_{hk} a''_{hl} - T^{kl} a_{hl} a''_{ki} = 0 \quad (i, l, h, k = 1, 2, 3)$$

schreiben. T^{ii} ist der „Trägheitstensor“ des Systems der Massenpunkte. Aus der Transformation (6) gewinnen wir durch Überschiebung mit $a_{ir}(t)$ die Umkehrung

$$(10) \quad x_r = a_{ir}(t) \bar{x}_i.$$

Ist $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ ein fester Punkt im Inertialsystem, so ist sein Geschwindigkeitsvektor in bezug auf das mit dem Kreisel starr verbundene System x_1, x_2, x_3 nach (10) gleich

$$(11) \quad \frac{dx_r}{dt} = a'_{ir} \bar{x}_i = a'_{ir} a'_{ik} x_k = v_{kr} x_k,$$

wenn wir

$$(12) \quad a_{ik} a'_{ir} = v_{kr} \quad (i, k, r = 1, 2, 3)$$

setzen. Aus (12) und $a_{ik} a_{ir} = \delta_{kr}$ folgt

$$(13) \quad v_{kr} = -v_{rk}.$$

Es sind nach (11) und (13) v_{33}, v_{31}, v_{12} die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Inertialsystems in bezug auf das mit dem Kreisel starr verbundene System x_1, x_2, x_3 . Wegen (12) ist $a'_{ik} = v_{ik} a_{it}$, und durch Differentiation von (12) nach der Zeit t erhalten wir

$$(14) \quad v'_{kr} = a'_{i\lambda} a'_{i'r} + a_{i\lambda} a''_{i'r} = v_{i\lambda} v_{i'r} + a_{i\lambda} a''_{i'r},$$

was in (9) eingesetzt

$$(15) \quad T^{i\lambda}(v'_{k\lambda} - v_{r\lambda} v_{r\lambda}) - T^{k\lambda}(v'_{i\lambda} - v_{r\lambda} v_{r\lambda}) = 0$$

ergibt.

Ist das mit dem Kreisel starr verbundene System x_1, x_2, x_3 auf dessen Hauptträgheitsachsen bezogen — dies ist mittels einer orthogonalen Transformation stets erreichbar —, so erhalten wir statt (15) die EULERSchen Kreisgleichungen (wir schreiben kurz T^i statt $T^{i\lambda}$)

$$(16) \quad (T^i + T^k)v'_{k\lambda} = (T^i - T^k)v_{r\lambda} v_{r\lambda} \quad (\text{nicht summieren über } i \text{ und } k),$$

weil dann für $i \neq k$ stets $T^{ik} = 0$ ist.

16569

Register.

- Abhängige Vektoren 7
 Ableitung, tensorielle 29, 34
 —, absolute oder kovariante 35
 Ableitungsgleichungen 207
 absolute Ableitung (-s Differential) 35
 Abstandsaxiome 81
 adjungierte Formen 205
 — n -Beine 12
 — Tensoren 23
 affine Geometrie 6, 67
 alternierende Tensoren 23
 äquivalente Beine 203
 Asymptotenlinien 159

 Bedingungsgleichungen, algebraische 209
 —, Codazzische 214
 —, Gaußsche 212
 begleitendes k -Bein einer Kurve 62
 Bein (n -Bein) 11
 —, normiertes 43
 Beindarstellung 15
 — absoluter Differentiale 38
 Beinkomponenten 50
 benachbarte Vektorräume 204
 Bestimmungstücke eines Tensors 12
 — eines Vektors 5, 9
 Bewegung 64, 68
 Bewegungsgruppe 64, 191
 Bianchi 127
 Bogenlänge 51, 80

 Christoffel 34
 — -klammern 35
 Codazzische Gleichungen 214

 definit 27
 Definitionspunkt 5, 9, 12
 Differential, tensorielles 30
 Dimension eines Vektorraumes 17
 Drehzentrum 176

 Ebene 140, 158
 β -Funktion, Weierstraßsche 102, 104, 114
 Einbettungszahl 222
 Eindeutigkeit der Parallelverschiebung 121, 147
 Einheitsvektor 39
 Eisenhart 121
 erweiterte Bewegungsgruppe 64
 euklidischer Raum 64
 Eulersche Differentialgleichungen 89
 — —, Normalform 91
 — Kreisgleichungen 240
 Eulerscher Vektor 86
 extensive Größe 4
 Extremalbogen 85
 — -gebiete 110

 Feld (von Extremalbogen) 103
 Fermi 137
 Flächenvektor (-tensor) 56, 154
 Formenproblem 215
 — -quadrate 205, 219
 Frenetformeln 62

 Gaußsche Gleichungen 212
 Gaußscher Integralsatz 240
 Gefällsflächenfeld 112
 — -kurven 104
 — -parameter 105
 gemischter Tensor 12
 Geodätische 115
 geodätische F ; 132, 158
 — — in engerem Sinn 133
 — Koordinaten 117, 136
 — Parallele 146
 Geometrie, affine 6, 67
 — projektive 4
 gleichartige Tensoren 13
 Graßmann 4
 Graßmannsche Tensoren 20
 Größe, extensive 4
 —, skalare 4

 halbdefinit 27
 Hilbertscher Unabhängigkeitssatz 105
 homotop 88
 Hornich 22
 Hüllkurvensatz 108
 Hyperfläche 53

 Identitäten von Bianchi 127
 indefinit 27
 Index des J_p 204
 induzierte Metrik 57
 inneres Produkt 9, 16
 Integralsatz, Gaußscher 240
 Invariante 4
 Invariantensystem, vollständiges 68
 isotroper Kegel 40
 Isotropie 128

 kanonische Darstellung 25
 Klein 67
 Klein-Cayleysche Darstellung der R_n konst. Krümmung 195
 Komponenten eines Vektors 5, 9
 — eines Tensors 12
 konforme Abbildung 199
 kongruent 68
 Kongruenz um einen Punkt 174
 kontravarianter Maßtensor 36
 — Tensor 12
 — Vektor 5
 — Vektorraum 6, 16
 Koordinaten im R_n 1, 22
 —, geodätische 117, 136
 —, kartesische 64
 —, natürliche 69
 —, projektive 188
 kovariante Ableitung 35
 kovariante Tensor 12
 — Vektor 9
 Kreisgleichungen, Eulersche 240

- Krümmung, Riemannsche 127
 — einer Kurve 62
 Krümmungstensor 120, 125
 —, Beindarstellung 129
 —, k ter, einer F_i , 212, 223
 —, relativer 164
 Länge eines Vektors 39
 — — Kurvenbogens 51
 Linse 22
 Levi-Civita 118, 137, 161
 linear abhängig (unabhängig) 7
 Linearform 9
 Maßtensor 28, 36
 Metrik, induzierte 57
 Meusnier, Satz von 234
 m -System 1
 Multilinearform 12
 natürliche Koordinaten 69
 n -Bein 11
 normal 18
 Normalenräume einer F_i , 202
 — -vektor 62
 Normalkoordinaten 97, 98, 116
 — -vektorraum 18
 normierter Plückerscher Tensor 46
 — Vektor 39
 normiertes n -Bein 43
 Nullextremalen 90
 — -tensor 15
 — -vektor 7
 offene Kugel 98
 orthogonale Matrix 4
 Parallele, geodätische 146
 Parallelverschiebung 118
 parallelverschobene Vektorräume 123, 147
 Parameterkurve 84
 Plückersche Tensoren 20
 — —, normierte 46
 Polarkoordinaten 181
 Produkt von Tensoren 15
 — -raum 153
 Projektion eines Vektors 45
 Projektionstensor 44
 — -vektor 45
 projektive Geometrie 67
 — Koordinaten 188
 pseudoeuklidischer Raum 194
 Punktraum 1
 Rang eines Tensors 2. Stufe 18
 Raumvektor (-tensor) 154
 relativer Krümmungstensor 164
 relatives Minimum 83
 Relativkrümmung 165
 Ricciableitung, Riccidifferential 35
 — verallgemeinert 156
 Riccikalcul 31
 —, erweiterter 156
 Richtung 39
 Riemannsche Krümmung 127
 — Normalkoordinaten 116
 Riemannscher Raum 28, 36
 — — konstanter Krümmung 143, 181, 226
 Scheffers 53
 schiefsymmetrische Tensoren 23
 Schmiegraum 123, 202
 Schurscher Raum 167
 Serret 53
 sinnvolle Aussage 3
 Skalar 4, 12
 stetig differenzierbar 1, 22
 Stufe (eines Tensors) 12
 Summe von Tensoren 15
 symmetrische Tensoren 23
 Tangentenraum 154
 — -vektor 51
 Tangentenvektorraum 56
 Tensor 12
 Tensor, alternierender 23
 —, gemischter 12
 —, Plückerscher 20, 46
 —, schiefsymmetrischer 23
 —, symmetrischer 23
 Tensoren, adjungierte 23
 —, gleichartige 13
 tensorielle Ableitung 29, 34
 tensorielles Differential 30
 Tensorindizes 13
 Trägheitsgesetz 26
 Trägheitstensor 242
 transversal 107
 überbenachbarte Vektorräume 204
 Überschiebung 16
 Umgebung 82
 unabhängige Vektoren 7
 Unabhängigkeitssatz, Hilbertscher 105
 Variation, erste 85
 Variationsproblem, positiv definites 80
 Vektor, Eulerscher 86
 —, kontravarianter 5
 —, kovarianter 9
 —, normierter 39
 — (schlechthin) 36
 Vektorräume, kontravariante 6, 16
 —, parallelverschobene 123, 147
 —, benachbarte und überbenachbarte 204
 Verjüngung 15
 vollständiges Invariantensystem 68
 Volumen 47, 52, 57
 Weierstraßsche ξ -Funktion 102, 104, 114
 Winkel zweier Vektoren 40
 Zahlraum 1
 zulässige Koordinaten 3

Duschek-Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie
Band I

KURVEN UND FLÄCHEN
IM EUKLIDISCHEN RAUM

Mit 14 Fig. im Text. Geb. *R.M.* 17.—

Der erste Band entwickelt die Theorie der Kurven und Flächen im euklidischen Raum von drei Dimensionen unter ausgiebigster Heranziehung der Methoden des modernen Vektor- und Tensorkalküls. Dem Charakter eines einführenden Lehrbuches entsprechend wird nichts gebracht, zu dessen Begründung dem Leser nicht auch die Mittel an die Hand gegeben würden.

Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung. Von Dr. *W. Wirtinger*, Prof. a. d. Univ. Wien. Mit einem Bildnis. [23 S.] 8. 1926 (Abhandlungen a. d. Math. Seminar d. Univ. Hamburg. Einzelschriften. 3. Heft.) Geh. *R.M.* 1.—

Grundlagen der Differentialgeometrie. Von Dr. *J. Knoblauch*, weil. Prof. a. d. Univ. Berlin. [X u. 634 S.] gr. 8. 1913. Geh. *R.M.* 18.—

Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Von Dr. *W. Schell*, weil. Prof. in Karlsruhe. 3. Aufl. von Dr. *E. Salkowski*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Berlin. Mit 66 Fig. [XI u. 196 S.] gr. 8. 1914. Geh. *R.M.* 8.—

Vorlesungen über natürliche Geometrie. Von Dr. *E. Cesàro*, weil. Prof. a. d. Univ. Neapel. Autorsierte deutsche Ausgabe von Dr. *G. Kowalewski*, Prof. a. d. Univ. Bonn. 2. Aufl. Mit einem Anhang über die verallgemeinerte natürliche Geometrie. Mit 48 in den Text gedr. Fig. [VIII u. 352 S.] gr. 8. 1926. Geh. *R.M.* 14.—

GEOMETRIE

(III. Band. III. Teil (Heft 1—7) der Encyclopädie der math. Wissenschaften.)
[XIV u. 812 S.] 4. 1902/1927. Geh. *R.M.* 34.60, geb. *R.M.* 41.60

In Einzelheften:

- | | |
|--|---|
| 1. Heft. 1902. Geh. <i>R.M.</i> 8.60
<i>v. Mangoldt, H.</i> , Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen.
<i>v. Lilienthal, R.</i> , Die auf einer Fläche gezogenen Kurven. | 5. Heft. 1921. Geh. <i>R.M.</i> 2.40
<i>Salkowski, E.</i> , Dreifach orthogonale Flächensysteme. |
| 2. u. 3. Heft. 1903. . . . Geh. <i>R.M.</i> 9.60
<i>Scheffers, G.</i> , Besondere transzendente Kurven.
<i>v. Lilienthal, R.</i> , Besondere Flächen.
<i>Voß, A.</i> , Abbildung und Abwicklung zweier Flächen aufeinander. | 6. Heft. 1922. Geh. <i>R.M.</i> 4.60
<i>Weizenböck, R.</i> , Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie. Differentialinvarianten. |
| 4. Heft. 1915. Geh. <i>R.M.</i> 3.80
<i>Liebmann, H.</i> , Berührungstransformat. | 7. Heft. 1927. Geh. <i>R.M.</i> 5.60
<i>Berwald, L.</i> , Differentialinvarianten in der Geometrie. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen.
Titel, Inhaltsverzeichnis und Register zu Band III, III. Teil. |

Gesamtverzeichnis der Encyclopädie vom Verlag erhältlich

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Grundlagen der Geometrie. Von Geh. Reg.-Rat Dr. *D. Hilbert*, Prof. a. d. Univ. Göttingen. 7. Aufl. Mit zahlr. Fig. [ca. VIII u. 272 S.] 8. 1930. (Wiss. u. Hyp. Bd. VII.) Geb. *RM* 11.—

Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Von Dr. *R. Bonola*, weil. Prof. a. d. Univ. Bologna. Aut. deutsche Ausg. besorgt von Dr. *H. Liebmann*, Prof. a. d. Univ. Heidelberg. 3. Aufl. Mit 52 Fig. i. T. [VI u. 207 S.] 8. 1921. (Wiss. u. Hyp. Bd. IV.) Geb. *RM* 5.60

Die vierte Dimension. Eine Einführung in das vergleichende Studium der verschiedenen Geometrien. Von Dr. *Hk. de Vries*, Prof. a. d. Univ. Amsterdam. Nach der 2. holländischen Ausgabe ins Deutsche übertragen von Frau Dr. *R. Struik*. Mit 35 Fig. i. T. [IX u. 167 S.] 8. 1926. (Wiss. u. Hyp. Bd. XXIX.) Geb. *RM* 8.—

Analytische Geometrie. Von Dr. *L. Bieberbach*, Prof. a. d. Univ. Berlin. Mit 39 Fig. i. T. [IV u. 120 S.] 8. 1930 (Teubn. math. Leitfäden Bd. 29.) Kart. *RM* 6.60

Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Von *G. Salmon*. Nach der freien Bearbeitung von Dr. *W. Fiedler*, weil. Prof. a. d. Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich, neu hrsg. von Geh. Hofrat Dr. *F. Dingeldey*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt.

I. Teil. 9. Aufl. [XXX u. 452 S.] gr. 8. 1922. Geb. *RM* 18.—

II. Teil. 7. Aufl. [X u. 445 S.] gr. 8. 1918. Geh. *RM* 14.60, geb. *RM* 17.—

Analytische Geometrie des Raumes. Von *G. Salmon*. Deutsch bearb. von Dr. *W. Fiedler*, weil. Prof. a. d. Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich. Unt. Mitw. von Dr. *A. v. Brill*, Prof. a. d. Univ. Tübingen, neu hrsg. von Dr. *K. Kommerell*, Prof. a. d. Univ. Tübingen.

I. Band. 5. Aufl. [X u. 612 S.] gr. 8. 1923. Geb. *RM* 23.—

Auch in 2 Lieferungen:

1. Lieferung: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiter Ordnung. 5. Aufl. Mit 48 Fig. [X u. 366 S.] gr. 8. 1922. Geh. *RM* 12.—

2. Lieferung: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiter Ordnung. 5. Aufl. Mit 23 Fig. [IV u. 246 S.] gr. 8. 1923. Geh. *RM* 8.—

Vorlesungen über darstellende Geometrie. Von Prof. Dr. *F. v. Dalmwigk*, München.

I. Band: Die Methoden der Parallelprojektion. Mit 184 Fig. [XVI u. 364 S.] gr. 8. 1911. Geb. *RM* 15.—

II. Band: Perspektive, Zentralkollineation u. Grundzüge d. Photogrammetrie. Mitüb. 130 Fig. [XI u. 322 S.] gr. 8. 1914. Geh. *RM* 12.—, geb. *RM* 14.—

Vorlesungen über Algebra. Unt. Benutzung der dritten Aufl. des gleichnamigen Werkes von † Dr. *G. Bauer*. In 4., verm. Aufl. dargest. von Dr. *L. Bieberbach*, Prof. a. d. Univ. Berlin. Mit 16 Fig. i. T. u. auf 1 Taf. [X u. 334 S.] gr. 8. 1928. Geb. *RM* 20.—

Höhere Algebra. Autorisierte deutsche Ausg. von *L. E. Dickson* „Modern algebraic theories“. Hrsg. von *E. Bodewig*, Köln a. Rh. Mit 3 Fig. [VII u. 242 S.] 8. 1929. Geb. *RM* 14.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Lehrbuch der Combinatorik. Von Geh. Hofrat Dr. *E. Netto*, weil. Prof. a. d. Univ. Gießen. 2. Aufl. erweit. u. mit Anmerkungen versehen von *V. Brun*, Prof. a. d. Univ. Trondhjem (Norwegen), und *Th. Skolem*, Dozent a. d. Univ. Oslo. [VIII u. 341 S.] gr. 8. 1927. (Teubn. Lehrb. d. math. Wiss. Bd. VII.) Geb. *R.M.* 14.—

Differential- und Integralrechnung. Von Dr. *L. Bieberbach*, Prof. a. d. Univ. Berlin. (Teubn. math. Leitfäden Bd. 4 u. 5.)

I. Teil: Differentialrechnung. 3., verm. u. verb. Aufl. Mit 34 Fig. [VI u. 142 S.] 8. 1928. Kart. *R.M.* 5,40

II. Teil: Integralrechnung. 3., verm. u. verb. Aufl. Mit 25 Fig. [VI u. 150 S.] 8. 1928. Kart. *R.M.* 5,80

Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Von Dr. *G. Kowalewski*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Dresden. 4., verb. Aufl., vermehrt durch einen Anhang über Fredholm'sche Determinanten und Integralgleichungen. Mit 31 Fig. i. T. [V u. 417 S.] 8. 1928. Geb. *R.M.* 16.—

Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Von Dr. *R. Kothe*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Berlin. (Teubn. math. Leitfäden Bd. 21—23.)

I. Band: Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen. 3. Aufl. Mit 155 Fig. i. T. [VII u. 189 S.] 8. 1930. Kart. *R.M.* 6.—

II. Band: Integralrechnung, Unendliche Reihen, Vektorrechnung nebst Anwendungen. Mit 96 Fig. i. T. [VIII u. 201 S.] 8. 1929. Kart. *R.M.* 6,40

III. Band: Raumkurven und Flächen, Linienintegrale und mehrfache Integrale, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen nebst Anwendungen. [In Vorb. 1930]

Praktische Infinitesimalrechnung. Von *F. F. P. Bisacre*, M. A. (Cambridge), Chartered Civil Engineer, Glasgow. Berechtigte deutsche Ausgabe unt. Mitw. von Dr. *E. Trefftz*, Prof. a. d. Techn. Hochschule in Dresden, hrsg. von Dr. phil. *E. König*, Elberfeld. Mit 104 Abb. u. 5 Bildn. i. T. [XI u. 364 S.] 8. 1929. Geb. *R.M.* 18.—

Mathematisches Praktikum. Von Dr. *H. v. Sanden*, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. (Teubn. math. Leitfäden Bd. 27 u. 28.)

I. Band. Mit 17 Fig. i. T. sowie 20 Zahlentaf. als Anhang. [V u. 122 S.] 8. 1927. Geb. *R.M.* 6,80.

II. Band. [In Vorb. 1930]

Das Lebesguesche Integral. Eine Einführung in die neuere Theorie der reellen Funktionen. Von Dr. *E. Kamke*, Prof. a. d. Univ. Tübingen. Mit 9 Fig. i. T. [IV u. 151 S.] 8. 1925. (Samml. math.-phys. Lehrbücher Bd. 23.) Kart. *R.M.* 7.—

Vorlesungen über reelle Funktionen. Von Dr. *C. Carathéodory*, Prof. a. d. Univ. München. 2. Aufl. Mit 47 Fig. i. T. [X u. 718 S.] gr. 8. 1927. Geh. *R.M.* 27.—, geb. *R.M.* 29.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

